

פתרון למבחן אלגברה לינארית 1 קיץ תשעז מועד א'

1. משפט מההרצאה

2. (א) הוכחה: ראשית נזכור שלפי משפט מההרצאה, מטריצה A היא הפיכה אם ורק אם בצורה המדורגת קנונית שלה אין שורות אפסים. כמו כן הוכנו בהרצאה שמטריצות A, B הן הפיכות אם ורק אם $A \cdot B$ הפיכה. כעת אפשר להוכיח בקלות. מצד אחד אם ל $CF(A)$ יש שורת אפסים אז A לא הפיכה ולכן A^2 לא הפיכה ולכן ל $CF(A^2)$ יש שורת אפסים. מצד שני אם ל $CF(A^2)$ יש שורת אפסים אז A^2 לא הפיכה ולכן A לא הפיכה ולכן ל $CF(A)$ יש שורת אפסים?

(ב) הפרכה: ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A היא כבר מדורגת קנונית כלומר $CF(A) = A$ ויש בה בדיוק שתי שורות אפסים אבל

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא גם מטריצה מדורגת קנונית כלומר $CF(A^2) = A^2$ אבל ב A^2 יש ארבע שורות אפסים.

(ג) הוכחה: נניח בשלילה ש $A^2 = 0$ כלומר $A \cdot A = 0$ לפי משפט כפל עמודה עמודה

$$C_i(A \cdot A) = AC_i(A)$$

אבל

$$C_i(A \cdot A) = C_i(0) = 0$$

כלומר

$$AC_i(A) = 0$$

ולכן

$$C_i(A) \in N(A)$$

כלומר כל עמודה של A נמצאת במרחב האפס של A . לכן גם כל צירוף לינארי של עמודות נמצא במרחב האפס ולכן

$$C(A) \subseteq N(A)$$

ובפרט

$$\text{rank } A = \dim C(A) \leq \dim N(A)$$

כמו כן, לפי משפט מההרצאה (משפט הדרגה למטריצות)

$$\text{rank } A + \dim N(A) = 5$$

(כי במטריצה שלנו יש 5 עמודות) לכן

$$\dim N(A) = 5 - \text{rank } A$$

אם נציב זאת באי שוויון שקיבלנו קודם נקבל

$$\text{rank } A \leq 5 - \text{rank } A$$

$$2 \text{rank } A \leq 5$$

$$\text{rank } A \leq \frac{5}{2}$$

אבל היות ש $\text{rank } A$ הוא מספר שלם אז זה בעצם אומר ש

$$\text{rank } A \leq 2$$

בסתירה לנתון ש

$$\text{rank } A > 2$$

(ד) הוכחה: לפי משפט על rank מתקיים ש $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A, \text{rank } B$ במקרה שלנו אפשר לקחת $A = B$ ואז

$$4 = \text{rank}(A^2) \leq \text{rank } A$$

לכן יש רק שתי אפשרויות עבור $\text{rank } A$: או 4 או 5. אבל אם $\text{rank } A = 5$ אז A הפיכה ואז A^2 הפיכה ואז $\text{rank } A^2 = 5$ בסתירה. לכן האפשרות היחידה שנותרת היא

$$\text{rank } A = 4$$

ובזה הוכחנו.

3. הוכחה: נסמן $u = Tv - v$ לפי הנתון $Tv \neq v$ ולכן $u \neq 0$ אבל

$$T(u) = T(Tv - v) = TT(v) - T(v) = T(v) - T(v) = 0$$

וזהו.

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

(א) צריך להבין מתי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של עמודות A וזה קורה בדיוק כאשר יש פתרון למערכת

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

אז נבדוק לאילו ערכי a יש פתרון (לפחות אחד) למערכת הנ"ל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & a \end{array} \right)$$

נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & a \end{array} \right) \xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & a \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=R_3+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & a+1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array} \right)$$

כדי שלא תהיה שורת סתירה צריך ש $a = -3$. וזה הפתרון.

(ב) ביצוע פעולות שורה לא משנה את מרחב השורות. אז אפשר פשוט לבצע פעולות

שורה עד שנגיע למטריצה שאחת העמודות שלה היא $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. וזה די קל

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=-R_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{array} \right)$$

(ג) כדי למצוא בסיס ומימד לחיתוך, כדאי לתאר את המרחבים שלנו כאוסף פתרונות

של מערכת משוואות כלשהיא עבור מרחב האפס זה מידי

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$$

כלומר מרחב האפס מתואר על ידי המערכת

$$\begin{aligned}x + 3z &= 0 \\2x + y + 5z &= 0 \\-x + 2y - 5z &= 0\end{aligned}$$

מרחב העמודות דווקא נתון לנו כ span של כמה וקטורים. אבל יש לנו אלגוריתם שמאפשר לנו לייצג אותו כפתרון של מערכת משוואות

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & x \\2 & 1 & 5 & y \\-1 & 2 & -5 & z\end{array}\right) &\xrightarrow{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & x \\0 & 1 & -1 & y-2x \\-1 & 2 & -5 & z\end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3+R_1} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & x \\0 & 1 & -1 & y-2x \\0 & 2 & -2 & z+x\end{array}\right) &\xrightarrow{R_3=R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & x \\0 & 1 & -1 & y-2x \\0 & 0 & 0 & z+5x-2y\end{array}\right)\end{aligned}$$

בסך הכל כדי שיהיה פתרון למערכת צריך ש

$$5x - 2y + z = 0$$

וזאת המשוואה שמתארת את מרחב העמודות. עכשיו, המרחב $C(A) \cap N(A)$ הוא אוסף הוקטורים שנותרים את כל המשוואות הנ"ל כלומר

$$\begin{aligned}x + 3z &= 0 \\2x + y + 5z &= 0 \\-x + 2y - 5z &= 0 \\5x - 2y + z &= 0\end{aligned}$$

כדי למצוא בסיס ומימד נמצא את מרחב הפתרונות, כרגיל על ידי פתרון על ידי

דירוג של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

את הדירוג של 3 השורות הראשונות עשינו למעשה כבר פעמיים בסעיפים הקודמים, ברור שזה יוצא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

נותר לדרג את הסוף

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 = R_4 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 = R_4 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמו שרואים בקלות, בצורה המדורגת אין משתנים חופשיים ולכן הפתרון היחיד

הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. כלומר המרחב $C(A) \cap N(A)$ מכיל רק את $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ וזה

מרחב ממימד 0 שבסיסו הוא הקבוצה הריקה \emptyset .

(ד) ראינו כבר ש A היא מטריצה לא הפיכה (כי מרחב העמודות שלה הוא לא כל

\mathbb{R}^3 לכן גם

$$\begin{pmatrix} b & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix}$$

חייבת להיות מטריצה לא הפיכה, נדרג אותה ונראה איך זה יכול לקרות

$$\begin{pmatrix} b & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ b & 3 & 4 \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - bR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4+b \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4+b \\ 0 & 2 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - \frac{2}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4+b \\ 0 & 0 & b+1 - \frac{2}{3}(4+b) \end{pmatrix}$$

כדי שהמטריצה תהיה לא הפיכה צריך שבצורה מדורגת תהיה שורת אפסים. אז

צריך ש

$$b+1 - \frac{2}{3}(4+b) = 0$$

$$3b+3 = 8+2b$$

$$b = 5$$

וזאת התשובה.

5. (א) לפי הנתון

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

אם נבצע פיתוח לפי שורה ראשונה נראה שזה אומר ש

$$a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = 0$$

ולכן

$$a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

עכשיו נלך לביטויים שלנו

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & -b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + 2c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + 2c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= 2b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} d & e & f \\ 0 & 2b & -c \\ g & h & i \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 0 & 2b & -c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= - \left(-2b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \right) \\ &= 2b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ולכן באמת יש שוויון.

(ב) כבר אמרו לנו שהמטריצה A לא הפיכה ולכן $\text{rank } A \neq 3$. האפשרויות שנותרו

הן $\text{rank } A \in \{0, 1, 2\}$. עכשיו, אם $\text{rank } A = 0$ אז $A = 0$ ואז לא ייתכן ש

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 1$$

ולכן

$$\text{rank } A \in \{1, 2\}$$

עכשיו אם $\text{rank } A = 1$ אז אומר שכל שתי שורות במטריצה תלויות לינארית (אם)

היו שתי שורות בת"ל אז מימד מרחב השורות היה לפחות 2. בפרט, הוקטורים

$$(a, b, c), (d, e, f)$$

הם תלויים לינארית. כלומר יש α, β כך ש

$$\alpha(a, b, c) + \beta(d, e, f) = 0$$

ואז גם

$$\alpha(a, b) + \beta(d, e) = 0$$

כלומר גם (a, b) ו (d, e) תלויים לינארית ולכן

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0$$

בסתירה. האפשרות היחידה שנותרה היא

$$\text{rank } A = 2$$

(ג) אנחנו יודעים כבר שהמטריצה

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

אינה הפיכה. אם נבצע פיתוח לפי שורה אחרונה זה אומר לנו ש

$$g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0$$

היות ש

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 1$$

זה אומר ש

$$i = -g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

עכשיו אנחנו נוכיח שאם $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{vmatrix}$ אינה הפיכה, אז $t = i$. נפתח שוב לפי שורה אחרונה

$$g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{vmatrix} = 0$$

$$g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + t = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{vmatrix} = 0$$

ולכן

$$t = -g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = i$$

וזהו.