

אינפי 4 - תרגול 5

15 באוגוסט 2011

תרגיל

חשב את עבודת הכח:

$$F = -y^2\hat{i} + x^2\hat{j}$$

לאורך התצי העליון של האליפסה

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

לפי כיוון השעון.

$$W = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_L -y^2 dx + x^2 dy$$

נעשה פרמטריזציה:

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos t; & dx &= -3 \sin t \\y &= 2 \sin t; & dy &= 2 \cos t \\0 &\leq t \leq \pi\end{aligned}$$

כאשר t רץ מ- π עד 0 (כי זה נגד כיוון השעון) לכן:

$$\begin{aligned}W &= \int_{\pi}^0 -4 \sin^2 t (-3 \sin t) + 9 \cos^2 t (2 \cos t) dt \\&= \int_{\pi}^0 12 \sin^3 t + 18 \cos^3 t dt \\&= -12 \int_{\pi}^0 (1 - \sin^2 t) d(\cos t) + 18 \int_{\pi}^0 (1 - \sin^2 t) d(\sin t) \\&= -12 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{\pi}^0 + 18 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_{\pi}^0 = -16\end{aligned}$$

תרגיל

חשב את האינטגרל הקווי:

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

כאשר:

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j} + z^2\hat{k}$$

כאשר C נתון ע"י פרמטריזציה:

$$r(t) = \sin t \cdot \hat{i} + \cos t \cdot \hat{j} + t^2\hat{k}$$
$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

בכיוון עליית הפרמטר (בכיוון החיובי, נגד כיוון השעון).

$$dr = \cos t \cdot \hat{i} - \sin t \cdot \hat{j} + 2t\hat{k}$$

אז:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos t - \sin^2 t \cos t + 2t^5 = \frac{2}{6} t^6 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^6}{192}$$

משפט גרין

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

התנאים למשפט הם:

1. $Q(x, y), P(x, y) \in C^1$

2. D תחום דו-מימדי ששפתו C - עקום חלק לחלקים.

3. מגדירים את הכיוון החיובי של C כך שהתחום D נמצא משמאלו.

תרגיל

חשב באמצעות משפט גרין את

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$$

כאשר C הוא שפת התחום בין העקומות:

$$x = y^2$$
$$y = x^2$$

פתרון

$$I = \iint_D (2 - 1) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dx dy = \frac{1}{3}$$

תרגיל

$$\int_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$$

כאשר C הוא משולש שקודקודיו הם:

$$C = (1, 3)$$

$$B = (2, 2)$$

$$A = (1, 1)$$

וכיוונו חיובי ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$).

$$\begin{aligned} I &= \iint_D Q_x - P_y dx dy \\ &= \iint_D 2x + 2y - 4y dx dy \\ &= 2 \iint_D (x - y) ds \end{aligned}$$

הקווים הם:

$$AB: y = x$$

$$BC: y = 4 - x$$

$$CA: x = 1$$

אז:

$$I = 2 \int_1^2 \int_x^{4-x} x - y dx dy = -\frac{4}{3}$$

חישוב שטח לפי משפט גרין

השטח של גוף D הוא:

$$\iint_D 1 \cdot dx dy = \int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

ומתקיים

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

יש 3 דוגמאות נוחות להשתמש בהן עבור P ו- Q :

$$P = 0, Q = x \Rightarrow \int_C x dy$$

$$P = -y, Q = 0 \Rightarrow - \int_C y dx$$

$$P = -\frac{1}{2}y, Q = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2} \int -y dx + x dy$$

תרגיל

חשבו שטח של תחום המוגבל ע"י אליפסה:

$$\begin{aligned}x &= a \cos t \\y &= b \sin t \\0 &\leq t \leq 2\pi\end{aligned}$$

שיטה 1

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{2\pi} a \cos t \frac{d(b \sin t)}{dt} dt \\&= ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\&= ab \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\&= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2t dt \\&= \frac{ab}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = ab\pi\end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned}S &= - \int_0^{2\pi} b \sin t \cdot \frac{d(a \cos t)}{dt} dt = -ab \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt \\&= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = ab\pi\end{aligned}$$

שיטה 3

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -y dx + x dy = \frac{1}{2} (ab\pi + ab\pi) = ab\pi$$

תרגיל

מצא עקומה סגורה פשוטה (מתאימה לתנאי משפט גרין) שלאורכה יש לאינטגרל

$$\int_C \frac{1}{3} y^3 dx + \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) dy$$

ערך מקסימלי.

פתרון

$$I = \iint_D Q_x - P_y ds = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$$

נשים לב שהפונקציה $1 - x^2 - y^2$ חיובית בתוך מעגל היחידה ושלילית מחוץ למעגל היחידה ולכן הערך מקסימלי הוא כאשר D הוא עיגול היחידה, ולכן C הוא מעגל היחידה.

תרגיל

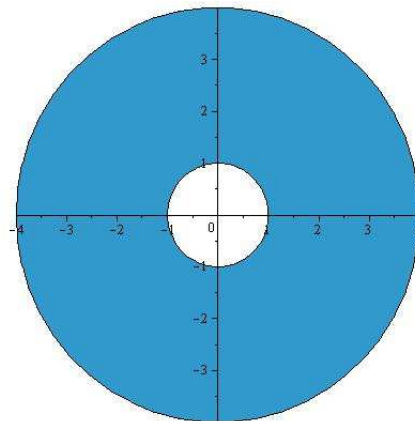
נחשב אינטגרל קווי:

$$\int_C x e^{-2x} dx + (x^4 + 2x^2 y^2) dy$$

כאשר C היא שפת התחום הכלוא בין שני המעגלים:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

התחום:



$$\begin{aligned} I &= \iint_D Q_x - P_y ds \\ &= \iint_D (4x^3 + 4xy^2 - 0) ds \\ &= \iint_D 4x(x^2 + y^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 4r \cos \theta \cdot r^2 \cdot r dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

משפט

אם

$$F(x, y, z) = (P, Q, R)$$

שדה רציף בתחום V אז התנאים הבאים שקולים:

1. לכל מסלול C סגור ב V מתקיים

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = 0$$

בדו מימדי:

$$\int Pdx + Qdy = 0$$

2. F שדה משמר.

3. קיימת פונק' $u(x, y, z) \in C^1$ ב V כך שמתקיים:

$$\begin{aligned} \nabla u &= F \\ \int_{A \rightarrow B} \vec{F} d\vec{r} &= u(b) - u(a) \end{aligned}$$

u נקראת הפוטנציאל של F .

4. אם V פשוט קשר אז

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

($\nabla \times F$) נקרא גם $rot(F)$ או $curl(F)$

תרגיל

האם השדה

$$F(x, y, z) = (yz, xz + 2y, xy + 1)$$

משמר? אם כן, חשב את הפוטנציאל שלו.

פתרון

נבדוק האם הוא משמר:

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz + 2y & xy + 1 \end{vmatrix} \\ &= (x - x)\hat{i} + (y - y)\hat{j} + (z - z)\hat{k} = 0 \end{aligned}$$

לכן השדה משמר בתחום פשוט קשר.

$$u(x, y, z) = \int P(x, y, z) dx = xyz + G(y, z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} + xz = xz + zy$$

$$G_y = 2y$$

$$G = y^2 + H(z)$$

$$u = xyz + y^2 + H(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R$$

$$xy + H_z = xy + 1$$

$$H_z = 1$$

$$H = z + c$$

$$u = xyz + y^2 + z + c$$