

תרגיל בית 3 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ז

הוראות זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

שאלה 1. יהי F שדה, ויהי R חוג. הוכיחו שאם $\varphi : F \rightarrow R$ אפימורפיזם של חוגים, אז גם R שדה.

שאלה 2. יהי R חוג, ויהי I אידאל. ראייתם כי $M_n(I) \triangleleft M_n(R)$. הוכיחו

$$M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$$

שאלה 3. הוכיחו שחוג הקוטרניונים \mathbb{H} אינו איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. שימו לב שזה מפתיע, כי שניהם חוגים פשוטים ושהם איזומורפיים כמרחבים וקטוריים מעל \mathbb{R} (שניהם ממימד 4).

שאלה 4.

א. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2-1 \rangle$$

ב. הוכיחו שהחוגים הבאים לא איזומורפיים

$$R = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2-1 \rangle$$

ג. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = \mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1 \rangle, \quad S = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y^2-1 \rangle$$

שאלה 5. הוכיחו שהחוג

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & \bar{y} \\ \bar{y} & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

איזומורפי לחוג $M_2(\mathbb{R})$. העזרו בהדרכות הבאות:
הדרכה א' - מצאו מערכת של יחידות מטריצה ובנו את האיזומורפיזם ביניהן.
הדרכה ב' - הראו שהחוגים האלו צמודים כתת-חוגים של $M_2(\mathbb{C})$.

שאלה 6. בחוג $R = \mathbb{Z}[x, y]$ נסמן שלושה אידאלים:

$$I_0 = \langle x, y \rangle, \quad I_1 = \langle x-1, y-3 \rangle, \quad I_2 = \langle x-2, y-5 \rangle$$

א. הוכיחו שכל שניים מבין האידאלים הם קו-מקסימליים.

ב. הוכיחו ש- $R/I_1 \cong \mathbb{Z}$ (טענה זו נכונה גם ל- I_0 ול- I_2).

שאלה 7. יהי חוג חילופי, יהי $a \in R$ איבר נילפוטנטי (כלומר קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $a^k = 0$), ויהי $f(x) = r_n x^n + \dots + r_1 x + r_0 \in R[x]$.

א. הוכיחו כי $a = 0$ או ש- a מחלק אפס.

ב. הוכיחו כי $1 + a \in R^\times$.

ג. הוכיחו שאם $u \in R^\times$, אז גם $u + a \in R^\times$.

ד. הוכיחו כי $f(x)$ הפיך ב- $R[x]$ אם ורק אם r_0 הפיך ו- r_1, \dots, r_n נילפוטנטיים.

ה. הוכיחו כי $f(x)$ נילפוטנטי ב- $R[x]$ אם ורק אם r_0, r_1, \dots, r_n נילפוטנטיים.

בהצלחה!