

חשבון אינפיניטסימאלי 3 – תרגיל בית מס' 4

שאלה 1

באילו נקודות במישור הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$f(x, y) = \ln(x^4 + y^6 + 1) \quad \text{ג.}$$

שאלה 2

נגדיר: $f(x, y) = (xy)^{\frac{2}{3}}$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- חשבו את $f_x(0, 0)$.
- האם $f_x(x, y)$ חסומה בסביבת הנקודה $(0, 0)$?
- האם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בראשית?
- האם תוכלו לחשוב על דוגמא של פונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת תכונות אנלוגיות לאלה שבסעיפים ב' ו-ג' לעיל (אבל כמובן בממד 1)?

שאלה 3

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{תהי}$$

כאשר $m \in \mathbb{R}$ פרמטר.

- עבור אילו ערכי m הפונקציה רציפה ב- $(0, 0)$?
- עבור אילו ערכי m הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$?

שאלה 4 (אין קשר בין סעיפי השאלה)

א. תהי $f(u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור \mathbb{R}^2 . נתון:
נגדיר: $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ כאשר: $\frac{\partial z}{\partial u}(7, 1) = 2$, $\frac{\partial z}{\partial v}(7, 1) = 3$
 $u(x, y) = 2x + 3y$, $v(x, y) = x - y$. חשבו את: $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) + \frac{\partial z}{\partial y}(2, 1)$.

ב. תהי $z(x, y)$ גזירה חלקית ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים במישור

הממשי כולו. נגדיר: $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ (מעבר

לקואורדינטות קוטביות – פולריות). רשמו את המשוואה: $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$
בקואורדינטות קוטביות.

שאלה 5

תהי $f(x, y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בקבוצה: $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$.
נתון: $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f$ לכל $(x, y) \in D$ עבור n טבעי כלשהו (המשוואה הרשומה כאן נקראת משוואת Euler, אחת מיני רבות הקרויות על שמו).
הוכיחו כי: $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ לכל $t > 0$ ו- $(x, y) \in D$.
(הערה: פונקציה, המקיימת את השוויון הנדרש נקראת פונקציה הומוגנית-חיובית מסדר n בקבוצה D).
הדרכה: תחילה הגדירו $F(t) = t^{-n} f(tx, ty)$ לכל $t > 0$ ו- $(x, y) \in D$ והראו כי היא קבועה.

שאלה 6

למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, כאשר a פרמטר ממשי חיובי, מעבירים מישור, המשיק בנקודה כלשהי. מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. הוכיחו כי סכום הקטעים $OA + OB + OC$, כאשר O היא ראשית הצירים, הוא גודל קבוע (כלומר אינו תלוי בנקודת ההשקה). מצאו גודל זה.