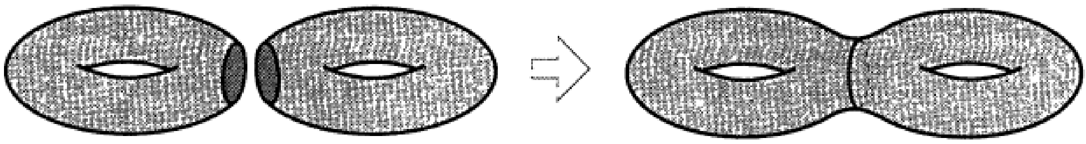
טופולוגית מנה (המשך)



תזכורת:

<u>**הגדרה**</u>: נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $\mathrm{q}:X\to Y$

(למשל $\mathrm{q}:X\to X/\sim$ פונקציה שמושרית מיחס שקילות).

אומרים ש σ **טופולוגית המנה** אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $\mathrm{q}:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $\mathrm{q}:(X,\tau)\to(Y,\lambda)$ רציפה אז $\lambda\subseteq\sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $\mathrm{q}:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או **העתקת מנה**).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

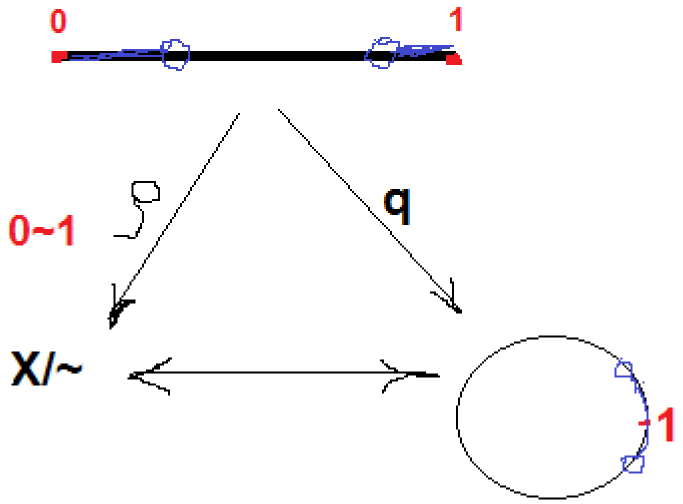
<u>**תאור של טופולוגית המנה**</u>: $\sigma:=\{O\subseteq Y\mid \quad q^{-1}(O)\in\tau\}$

דוגמה: $f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\mid \|z\|=1\}\quad \mathrm{f(x)}=\mathrm{cis}(2\pi\mathrm{x})$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה **וסגורה**).

הערה: אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X\to X/\sim\;\cong Y,\quad 0\sim 1$$



דוגמה: $\mathrm{id}:(\mathbb{R},\tau_{discr})\to\mathbb{R}$ רציפה על אבל **לא פונקצית מנה**.

הסבר: המקור $\{5\}=(\{5\})^{-1}\mathrm{id}$ פתוח ב $(\mathbb{R},\tau_{discr})$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה: פונקציה רציפה $\mathrm{id}:(\mathrm{X},\tau_1)\to(\mathrm{X},\tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1=\tau_2$.

דוגמה: $h(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ $\quad \mathrm{h}:X=[0,1)\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|z\|=1\}$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $\mathrm{A}:=\{\mathrm{z}\in\mathrm{T}\,|\,0\le\arg(z)<\frac{\pi}{2}\}$ המקור $\mathrm{h}^{-1}(\mathrm{A})=[0,\frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$

אבל A לא פתוח ב T.

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה – לא תורשתית. ז"א יתכן ש $\mathrm{f}:X\to Y$ העתקת מנה $\mathrm{A}\subseteq X$.
ופונקצית על שמושרית $\mathrm{f}_A:\mathrm{A}\to f(\mathrm{A})$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A=[0,1)\subset X=[0,1]$.

דוגמה נוספת: $p_1:X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=1\}\cup\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ לא מנה

(כי המקור של $\{0\}$ הוא נקודון $\{(0,0)\}$ שהיא נקודה מבודדת ב X

אבל $\{0\}$ לא פתוח ב $\mathbb{R}$).

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("הרבה יותר מהמקור"). למשל:

א. ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (Square-filling curves).

ב. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור.

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה: עבור הפונקציה $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\},\quad f(x)=\begin{Bmatrix}0, & x<0\\ 1, & 1\le x\end{Bmatrix}$

טופולוגית מנה על $Y=\{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma=\{\varnothing,\{0\},\{0,1\}\}$.

$\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1 .

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

דוגמה: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות $a\sim b\Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Q}$. אז מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$

הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של $\mathbb{R}/\sim$?)

הסבר: מחלקות שקילות הן מהצורה $[a]=a+\mathbb{Q}$. צפוף ולא סגור ב $\mathbb{R}$.

לכל מקור $q^{-1}(\mathrm{C})$ של תתקבוצה לא ריקה C ב $\mathbb{R}/\sim$ לגבי פונקציה טבעית
$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$

הקבוצה $q^{-1}(\mathrm{C})$ היא גם צפופה ב $\mathbb{R}$ (כי $q^{-1}(\mathrm{C})$ מכיל לפחות מחלקה אחת).

לכן האפשרות היחידה ש $q^{-1}(\mathrm{C})$ סגור היא $q^{-1}(\mathrm{C})$. אבל אז
$C = qq^{-1}(\mathrm{C}) = \mathrm{q}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\sim$ (קחו בחשבון ש $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$ על).

לכן ב $\mathbb{R}/\sim$ עם טופולוגית מנה σ יש רק קבוצה אחד סגורה לא ריקה (שהיא $\mathbb{R}/\sim$).

שקול: σ טופולוגיה טריוויאלית.

משפט: (**הומיאומורפיזם ומנה**)

נניח $\mathrm{f}:X\to Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז f מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הוכחה: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $\mathrm{f}:X\to Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ מתקיים תמיד $U\subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם $U=f^{-1}(f(U))$ (בגלל f חח"ע).

לפי הגדרת טופולוגית מנה קבוצה $O:=f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y.

הוכחנו ש f פתוח.

☺

משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $\mathrm{f}_2:\mathrm{Y}\to Z$ $\mathrm{f}_1:X\to Y$ פונקציות רציפות.

אם ההרכבה $\mathrm{f}=\mathrm{f}_2\circ\mathrm{f}_1:\mathrm{X}\to Z$ היא פונקצית מנה אז גם $\mathrm{f}_2:\mathrm{Y}\to Z$ פונקצית מנה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2\circ f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \to Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y. לפי הרציפות של $f_1 : X \to Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X. ברור $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$. אבל נתון ש $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ פונקצית מנה. לכן A פתוחה.

☺

תוצאה: נניח $f : Y \to Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום $f_X : X \to Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \to Z$ מנה.

הסבר: נפעיל משפט " הכללת קריטריון מנה" באופן הבא

כאשר $i : X \to Y$ שיכון טבעי

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f_X"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

☺

הגדרה: נניח $f : X \to Y$ ונתון יחס שקילות $\sim$ ב X (או נתונה חלוקה של X).

אומרים שפונקציה $f : X \to Y$

א. **מכבדת** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

ב. **מגדירה** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

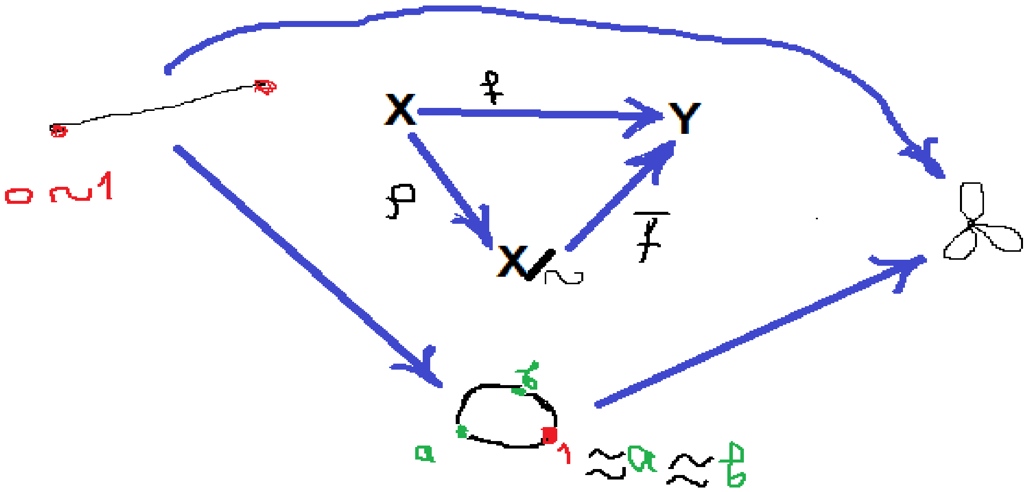
תכונות:

1. $f : X \to Y$ **מכבדת** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$\overline{f}([x]) = \overline{f}(\rho(x)) = f(x)$ $\quad \overline{f} : X/\sim \to Y$ $\quad$ (ז"א $f = \overline{f} \circ \rho$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & Y \\ & X/\sim \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

הערה: פירוש אינטואיטיבי -- יתכן ו $f : X \to Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות $\sim$ למשל



מוסכמה: בהמשך על $X/\sim$ ניקח טופולוגית מנה (אם לא נאמר אחרת).

2. $f : X \to Y$ רציפה אם ורק אם $\overline{f} : X/\sim \to Y$ רציפה.

הסבר: נפעיל משפט "טופולוגיה חזקה" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

אם $f : X \to Y$ רציפה אז גם $\overline{f} : X/\sim \to Y$.

3. $f : X \to Y$ מנה אם ורק אם $\overline{f} : X/\sim \to Y$ מנה

הסבר: נפעיל משפט "צמצום" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

אם $f : X \to Y$ מנה אז גם $\overline{f} : X/\sim \to Y$.

4. $f:X\to Y$ **מגדירה** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\overline{f}:X/\sim\ \to Y$ והיא חח"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב $X/\sim_f$ מרחב מנה כאשר $\sim_f$ הוא היחס שמוגדר ע"י $f:X\to Y$ (ז"א $a\sim_f b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $f:X\to Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ היא הומיאומורפיזם

הוכחה:

ב $\Leftarrow$ א

ברור כי $f=\overline{f}\circ\rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho:X\to X/\sim_f$ פונקצית מנה (כי בחרנו $X/\sim_f$ בטופולוגית מנה) ו $\overline{f}$ הומיאומורפיזם.

א $\Leftarrow$ ב

נתון $f:X\to Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ גם מנה. אבל $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ (על ו) חח"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "**הומיאומורפיזם ומנה**" נקבל ש $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ הומיאומורפיזם.

☺

הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיואומופיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

**דוגמה: ** הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\mid \|z\|=1\}\quad \mathrm{f(x)}=(\cos(2\pi\,\mathrm{x}),\sin(2\pi\,\mathrm{x}))$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$f: X \to T$ מגדירה את היחס $0 \sim 1$.

לפי משפט קריטריון קיים הומיאומורפיזם $\overline{f}:[0,1]/\sim_f \ \to T$.

לכן $[0,1]/\sim_f \ \cong T$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פונקצית מנה.

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T$

(כאשר $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=\{x+\mathbb{Z}\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

הסבר של א

(דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאת משפט צמצום עבור ההכלה $\mathrm{i}:[0,1]\to\mathbb{R}$.

(דרך 2) אפשר להוכיח שבעצם $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנ אם ניקח בחשבון שיחס שקילות $\sim_f$ כאן בדיוק נותן יחס הבא $a\sim_f b \Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow a\equiv b \bmod \mathbb{Z}$.

הערה: מחלקת שקילות של $a\in\mathbb{R}$ הוא $[a]=a+\mathbb{Z}$. ז"א תאור אחר של היחס הוא $a\sim_f a+n \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

תרגיל: * במעגל יחידה $T=\{z\in\mathbb{C}: \|z\|=1\}$ במישור המרוכב נגדיר יחס שקילות $-v\sim v$. הוכיחו שמרחב מנה $T/\sim$ הוא הומיאומורפי למעגל עצמו T.

פתרון: $\mathrm{f}:\mathrm{T}\to\mathrm{T}, \mathrm{f}(\mathrm{v})=\mathrm{v}^2$ היא פונקצית מנה (מדוע ?). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $-v\sim v$.

מידע: כאן בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2=\{\mathrm{e},\sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2\times T\to T \quad (\sigma,v)\mapsto\sigma(v)=-v$$

תרגיל: הוכיחו שאם ב $\mathbb{R}$ לכוץ קטע $[0,1]$ לנקודה 0 אז מרחב מנה הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathrm{f(x)}=\begin{Bmatrix} x & x\le 0 \\ 0 & 0\le x\le 1 \\ x-1 & 1\le x \end{Bmatrix}$$

הפונקציה היא רציפה על "ומדביקה" את כל הנקודות של קטע $[0,1]$. על מנת להוכיח שהפונקציה היא מנה מ"ל שהיא סגורה נתבונן ב 3 פונקציות צמצום שהן רציפות:

$$\mathrm{f}_1:(-\infty,0]\to(-\infty,0],\ \mathrm{f}_2:[0,1]\to\{0\},\ \mathrm{f}_3:[1,\infty)\to[0,\infty)$$

שמגדירות את הפונקציה באופן טבעי.

הפונקציות גם סגורות (שני הומיאומורפיזמים ואחד קבוע).

התמונות הן סגורות ב $\mathbb{R}$. לכן גם ההרכבות

$$\mathrm{f}_1:(-\infty,0]\to\mathbb{R},\ \mathrm{f}_2:[0,1]\to\mathbb{R},\ \mathrm{f}_3:[1,\infty)\to\mathbb{R}$$

פונקציות סגורות.

לכל תת קבוצה סגורה $A\subseteq\mathbb{R}$ נציג אותה כאיחוד

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\quad A_1=A\cap(-\infty,0],\ A_2=A\cap[0,1],\ A_3=A\cap[1,\infty)$$

של 3 תת קבוצות סגורות ב $\mathbb{R}$. התמונה $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)$

סגורה ב $\mathbb{R}$ כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

יריעות מסוימות כמנה של ריבוע

הגדרה: **יריעה** בעלת מימד n היא מרחב האוסדורף, שמקיים את אקסיומת המנייה השנייה, בעל התכונה שלכל נקודה במרחב יש סביבה שהומיאומורפית לחצי-מרחב

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_n\}$$

אם במקום H אפשר לקחת $\mathbb{R}^n$ אז אומרים **יריעה ללא שפה**.

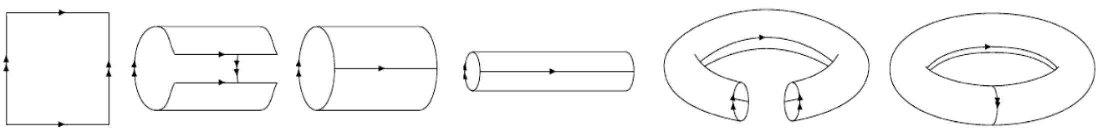
למשל: כל קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$ יריעה בעל מימד n, מעגל, טורוס ... יריעה ללא שפה.

כדור סגור ב $\mathbb{R}^n$ יריעה בעל מימד n עם שפה. ריבוע יריעה בעל מימד 2 עם שפה.

נראה כמה דוגמאות של יריעות 2-ממדיות שמתקבלות כמנה של ריבוע.

- טורוס דו-ממדי T^2 2-dimensional torus

אפשר לקבל אותו כמנה של גליל (שלב ביניים)



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

תרגיל: הוכיחו $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$

($\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \{(x,y) + \mathbb{Z}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f(\mathrm{x,y}) = (cis2\pi x, cis2\pi y)$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to T^2$.

צמצום הפונקציה $f : [0,1]^2 \to T^2$ פונקצית מנה. לכן לפי **משפט** (תנאי מספיק "צמצום") גם $f : \mathbb{R}^2 \to T^2$ מנה.

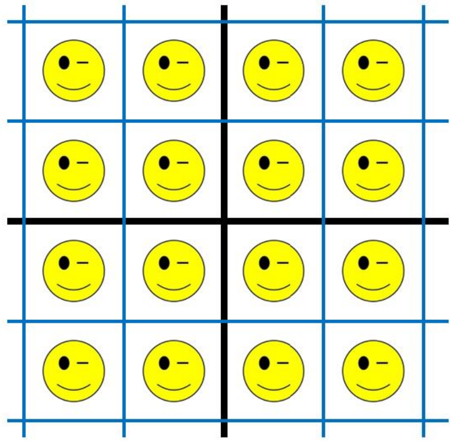
כעת לפי **משפט** (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2 / \sim_f \cong T^2$.

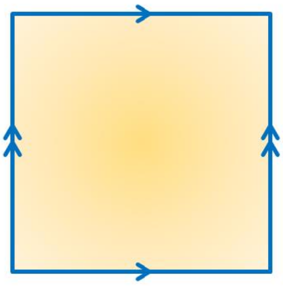
כאן יחס שקילות מתאימה היא $\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (a,b) \sim_f (a+n, b+m)$ המחלקות

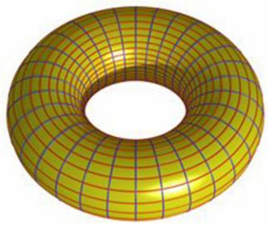
הן $\{(x,y) + \mathbb{Z}^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

לכן מרחב מנה $\mathbb{R}^2/\sim_f$ כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

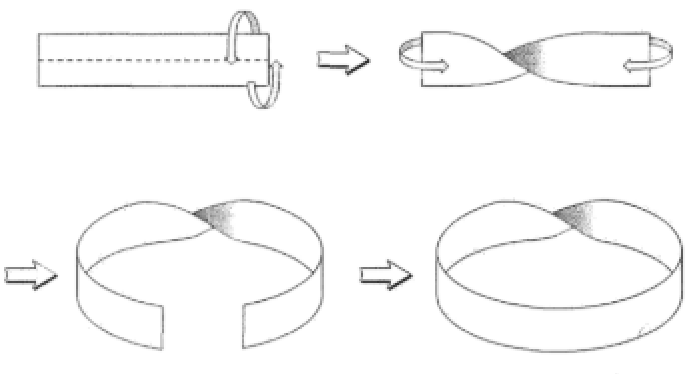




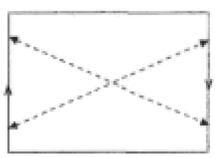


מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה.
בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

- Mobius strip טבעת מוביוס

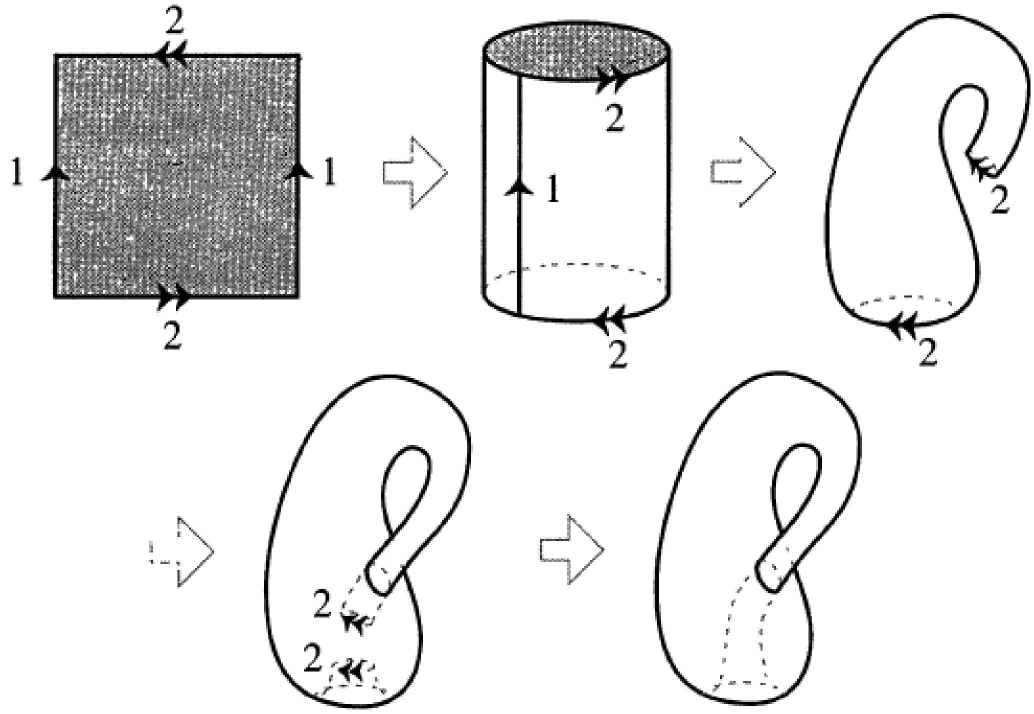


. הוא 2-ממדי. ללא אוריאנטציה. אפשר לקבל אותו גם כך $\mathbb{R}^3$ משוכן לתוך



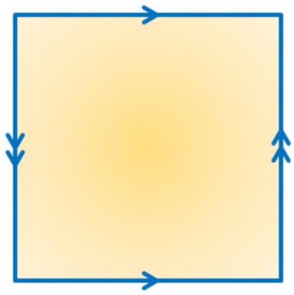
- בקבוק קליין Klein bottle

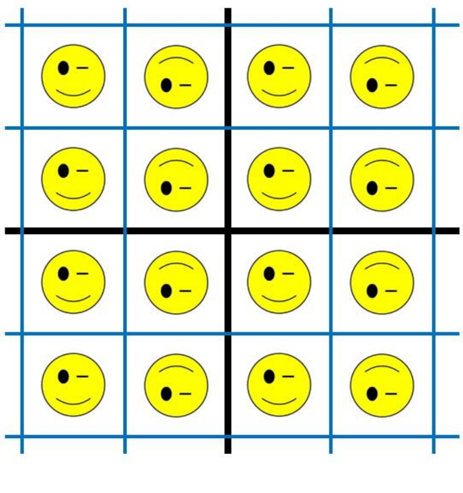
אפשר לקבל אותו כמנה של ריבוע

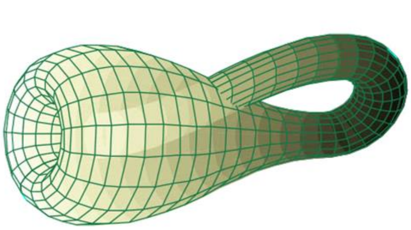


לא ניתן לשכן לתוך $\mathbb{R}^3$.

אפשר לקבל אותו דרך הדבקת שפות של שתי טבעות מוביוס.



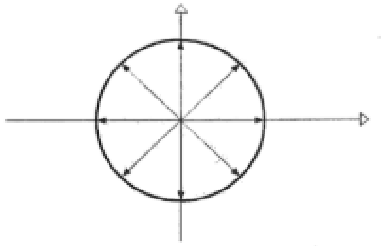




• מרחב פרוייקטיבי Projective space

P^n = מרחב קווים ישרים ב $\{0\} \setminus \mathbb{R}^{n+1}$ שעוברים דרך 0.

$q:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to P^n$ פונקצית מנה



צמצום של הפונקציה הנ"ל $q_S : S^n \to P^n$ על ספירה יחידה n-ממדית מוכיח שאכן q מנה

בגלל תוצאה של ה **משפט:** תנאי מספיק "צמצום"

כאן יחס שקילות שמתקבל על S^n הוא $-v \sim v$ (antipodal points)

$q:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to P^1$ מקרה פרטי **Projective line**

טענה: P^1 הומיאומורפי למעגל S^1.

הסבר: שקול לדבר על מישור $\mathbb{R}^2$ כמרחב מספרים מרוכבים $\mathbb{C}$. ובמקום S^1 על T.

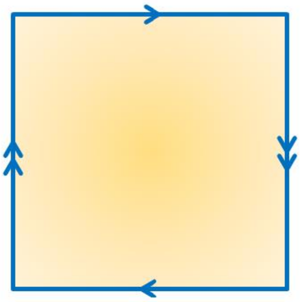
נגדיר (תרגיל שהיה) $f:T\to T, f(v)=v^2$ היא פונקצית מנה (פונקציה רציפה ועל מקומפקטי להאוסדופי). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $-v \sim v$.

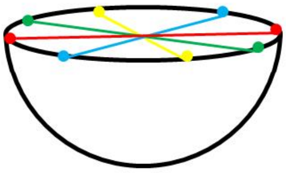
מישור פרוייקטיבי Projective plane

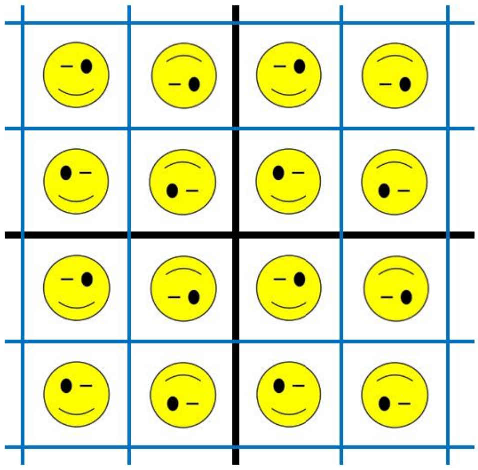
P^2 = מרחב קווים ישרים (מנוקבים) ב $\{0\} \setminus \mathbb{R}^3$ שעוברים דרך 0.

אפשר לקבל דרך $q_S : S^2 \to P^2$

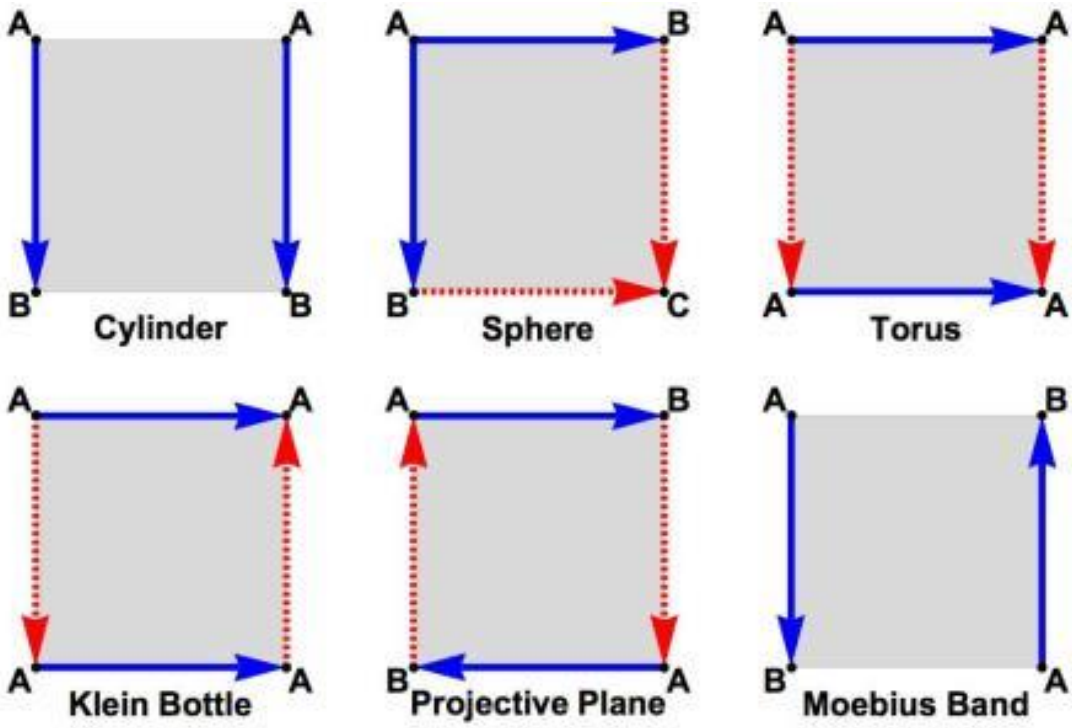
אפשרויות נוספות: כמנה של ריבוע, כמנה של חצי-ספירה, כמנה של מישור







סיכום: מנות מסוימות של ריבוע



תרגילים נוספים:

תרגיל: בספירה $S_2 := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\|=1\}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

לתאר מרחב מנה $S_2 / \sim$.

תרגיל: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

מה הוא מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$?

תרגיל: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

מה הוא מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$?

תרגיל: * מרחב מנה $S\times[0,1]/\sim$ של גליל $S\times[0,1]$ כשמכוצים את כל הנקודות של בסיס $S\times\{0\}$ לנקודה אחת הומיאומורפי לי דיסק סגור דו-מימדי

רמז: פונקציה $f(x,t) = tx \quad f: S\times[0,1] \to D$.

תרגיל: נניח D עיגול יחידה במרוכבים $\mathbb{C}$. נגדיר יחס שקילות $\sim$ ב D ע"י

$$(x, y) \sim (x, -y)$$

הוכיחו ש מרחב מנה $D/\sim$ הומאומורפי ל D .

תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X . פונקציה $f: X \to Y$ נקראת "רטרקציה" retraction אם היא רציפה **על** כך ש $f(y) = y \quad \forall y \in Y$

(שקול: f רציפה על ומתקיים $f \circ f = f$)

תרגיל:* נניח $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \vee y = 0\}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

נגדיר פונקציה $f(x, y) = x$ $f: X \to \mathbb{R}$ (צמצום של הטלה).

הוכיחו ש f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.