מד"ר למתמטיקאים

תרגיל 2

1. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאות:

(א) $t^2y'' = y'^2, \quad t > 0$

(ב) $yy'' - y'^3 = 0$

(ג) $ty'' - y' + 4t^3y = 0, \quad t > 0$ וידוע כי $y_1 = \sin(t^2)$

(ד) $(1+t^2)y'' + 2ty' + 3/t^2 = 0$

(ה) $t^2y'' + ty' + y = 0 \quad t \neq 0$ (משוואת אוילר)

2. משוואה מהצורה

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x) = 0 \tag{1}$$

נקראת מדויקת אם היא ניתנת לכתיבה כ

$$(P(x)y')' + (f(x)y)' = 0 \tag{2}$$

כאשר $f(x)$ תלויה בפונקציות $P(x), Q(x)$ ו $R(x)$. מאינטגרציה של המד"ר מסדר ראשון $Py' + fy = c_1$ המתקבלת ממשוואה (2) מתקבל פתרון למשוואה (1). ניתן להראות כי תנאי הכרחי ומספיק לכך שמשוואה (1) מדויקת הוא $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. אם משוואה (1) אינה מדוייקת ניתן להפוך אותה לכזו ע"י הכפלה בגורם אינטגרציה $\mu(x)$. אזי ניתן לרשום

$$(\mu(x)P(x)y')' + (f(x)y)' = 0, \tag{3}$$

כאשר $\mu(x)$ מקיימת את המשוואה הצמודה (adjoint equation)

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0. \tag{4}$$

בדקו האם המשוואה $y'' + \frac{4x}{2x-1}y' + \frac{8x-8}{(2x-1)^2}y = 0$ מדוייקת. אם לא, פתרו אותה ע"י מציאת גורם אינטגרציה מפתרון המשוואה הצמודה המתאימה ואינטגרציה של המד"ר $\mu Py' + fy = c_1$.

3. פתרו את בעיות ההתחלה הבאות:

(א) $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \; y'(0) = 0$

(ב) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

ג) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

ד) $4y''' + y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$

ה) $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0,$
$y(0) = 1,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 3$

4. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאות:

א) $y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \sin m\pi t$, $0 < \lambda \neq m\pi,\ m = 1, 2, ..., N$

ב) $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$

ג) $y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t$

ד) $y''' + y' = \tan t, \quad 0 < t < \pi/2$

ה) $y''' - y' = \csc t, \quad 0 < t < \pi$

5. הוכיחו כי אם $\phi(x)$ פתרון של המד"ר

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \qquad (5)$$

כאשר $p_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ רציפות בקטע (a, b),
אזי לפונקציות $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi^{(n-1)}(x)$ אין אף שורש משותף ב (a, b).
(רמז: $\phi(x)$ ניתנת לכתיבה כסכום $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ כאשר
$y_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ פתרונות יסודיים של המד"ר).

6. הוכיחו כי בהינתן פיתרון $y_1(x)$ של המד"ר $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, אזי פתרון זה והפיתרון השני המתקבל ע"י ההצבה $y_2 = v(x) y_1(x)$, בלתי תלויים לינארית.