חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 12: נקודות סינגולריות

1. (א) מיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{e^{1/(z-1)}}{e^z-1}$.

$z=1$ סינגולרית עיקרית. ניקח $z=x$ ונקבל
$\lim_{x\to 0^+} f=\infty\neq \lim_{x\to 0^-} f=0$.

נראה כעת כי הנקודות $z_k=2\pi k i,\ k=0,\pm1,\pm2,...$ הן קטבים פשוטים (מסדר ראשון). נרשום

$$f(z)=\frac{e^{1/(z-1)}}{(z-z_k)+\frac{1}{2!}(z-z_k)^2+....}=$$

$$=\frac{1}{z-z_k}\left(\frac{e^{1/(z-1)}}{1+\frac{1}{2!}(z-z_k)+....}\right)=\frac{\varphi(z)}{z-z_k},$$

כאשר $\varphi(z)$ אנליטית בסביבת הנקודות z_k ו $\varphi(z_k)\neq 0$.

(ב) משפט פיקארד:

פונקציה אנליטית בסביבה מנוקבת של נקודה סינגולרית עיקרית z_0 מקבלת אינסוף פעמים כל ערך סופי (פרט אולי אחד) בכל סביבה של z_0.

הראו כי $z_0=0$ נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)=e^{1/z}$ בעזרת משפט פיקארד.

נראה כי למשוואה $f(z)=e^{1/z}=c$ יש אינסוף פתרונות שואפים ל $z_0=0$ לכל $c\neq 0$. נרשום $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$, $c=|c|e^{i\alpha}$. נקבל

$$f(z)=e^{(\cos\phi-i\sin\phi)/r}=e^{\ln|c|+i\alpha},$$

ולכן $\cos\phi=r\ln|c|,\ \sin\phi=-r\alpha$. תוך שימוש בזהות $\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$ נקבל $r^2=1/(\alpha^2+\ln^2|c|),\ \tan\phi=-\alpha/\ln|c|$.
נשיב לב כעת כי ניתן להוסיף כפולה שלמה של 2π ל α מבלי לשנות את c וע"י כך לקבל סדרת נקודות $z_k=r_ke^{i\phi}$ כאשר $r_k=1/((\alpha+2\pi k)^2+\ln^2|c|),\ k=0,1,2,...$ כך ש $\lim_{k\to\infty} z_k=0$, ו $f(z_k)=c\neq 0$.

ג) הוכיחו כי אם $z = z_0$ קוטב מסדר n של פונקציה $f(z)$ אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 אז $z = z_0$ קוטב מסדר $n+1$ של $f'(z)$.

נרשום $f(z) = \varphi(z)/(z-z_0)^n$ כאשר $\varphi(z)$ אנליטית בסביבת z_0 ו $\varphi(z_0) \neq 0$. נגזור כעת את f ונקבל

$$f'(z) = \frac{\varphi'(z)}{(z-z_0)^n} - \frac{n\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\left(\varphi'(z)(z-z_0) - n\varphi(z)\right) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{n+1}},$$

כאשר $\psi(z) = \varphi'(z)(z-z_0) - n\varphi(z)$ אנליטית בסביבת z_0 ו $\psi(z_0) = -n\varphi(z_0) \neq 0$.