תרגיל 8 – אינפי 2

.1

a. דני שנא לעשות שיעורים באינטגרלים, והחליט אחת לתמיד להוכיח שכל האינטגרלים המסויימים הם אפס:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\{u = \pi\frac{(x-a)}{b-a}\right\} = C_1\int_0^{\pi} f(u)du = \{t = \sin u\} = C_1\int_0^0 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}du = 0$$

עזרו לדני לתקן את טעותו...

b. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx$ באמצעות $F(x)$ ו $G(x)$ כאשר

$$G(x) = \int f(\pi - \arcsin x)dx \text{ ו } , F(x) = \int f(\arcsin x)dx$$

2. תהיי f פונקציה רציפה, הוכח שקיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

(שימו לב שהנקודה נמצאת בקטע **הפתוח**...)

3. תהי f פונקציה רציפה. הוכח ש $\int_0^x \left[\int_0^t f(u)du\right]dt = \int_0^x f(u)(x-u)du$

4. תהי f רציפה, הוכח $\frac{d}{dx}\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right] = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$ (הכללה של מה שעשינו בכיתה).

5. בהמשך לתרגיל על f פונקציה עולה $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ כך שעבור $r_n :=$ $\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$ ראינו שמתקיים : $0 \le r_n \le \frac{f(1)-f(0)}{n}$.

כעת , **<u>נניח כי f גזירה ברציפות</u> , ונוכיח כי קיים : $\lim_{n\to\infty} n \cdot r_n = \frac{f(1)-f(0)}{2}$ –** בעזרת השלבים הבאים :

a. נגדיר : $F_k(x) := \int_{\frac{k}{n}}^{x}\left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]dt$. אז קיים : $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

בעזרת פיתוח טיילור הראו כי מתקיים : $F_k(x) = \frac{f^{(1)}(c)(x-\frac{k}{n})^2}{2}$, עבור נקודה c מתאימה כלשהיא

b. הראו כי קיים : $n \cdot r_n = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f^{(1)}(c_k)$ עבור נקודות $\frac{k}{n} \le c_k \le \frac{k+1}{n}$.

c. $f^{(1)}$ רציפה ולכן אינגרבילית , ומכאן שהראו בעזרת סכום רימן של פונקציה מתאימה את קיום הגבול הדרוש !

6. תהי f גזירה ברציפות הוכח ש $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx = 0$

7. תהי f רציפה. לכל $\varepsilon > 0$ נגדיר $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)dt$

a. הוכח ש $g_\varepsilon(x)$ גזירה

הוכחה: $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)dt = \{u = x+t\} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon+x}^{\varepsilon+x} f(u)du = \frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$

כאשר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. מכיוון ש f רציפה אזי F הקדומה שלה ולכן

$$g_\varepsilon'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

b. הוכח שלכל x מתקיים $\lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(x) = f(x)$

פתרון: $= \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon} + \frac{F(x-\varepsilon)-F(x)}{-\varepsilon}\right]$

$$= \frac{1}{2}(F'(x)+F'(x)) = f(x)$$

8. הוכיחו שלמשוואה $\int_0^x e^{-t^2}dt = x$ יש פתרון אחד ויחיד. מהו?

פתרון: נסמן $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt - x$ זו פונקציה רציפה וגזירה. $g'(x) = e^{-x^2} - 1$ עבור $x \neq 0$

מתקיים $g'(x) < 0$ ולכן $g(x)$ הפונקציה תמיד יורדת, ובפרט יכולה לפגוש את אפס פעם אחת לכל היותר. קל לראות שהנקודה אפס הינה פתרון למשוואה.