תרגיל 8 – אינפי 2

1.

a. דני שנא לעשות שיעורים באינטגרלים, והחליט אחת לתמיד להוכיח שכל האינטגרלים המסויימים הם אפס:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\{ u = \pi \frac{(x-a)}{b-a} \right\} = C_1 \int_0^{\pi} f(u)du = \{ t = \sin u \} = C_1 \int_0^0 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} du = 0$$

עזרו לדני לתקן את טעותו...

b. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx$ באמצעות $F(x)$ ו $G(x)$ כאשר

$$G(x) = \int f(\pi - \arcsin x)dx \text{ ו } , F(x) = \int f(\arcsin x)dx$$

2. תהיי f פונקציה רציפה, הוכח שקיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

(שימו לב שהנקודה נמצאת בקטע **הפתוח**...)

3. תהי f פונקציה רציפה. הוכח ש $\int_0^x \left[\int_0^t f(u)du \right] dt = \int_0^x f(u)(x-u)du$

4. תהי f רציפה, הוכח $\frac{d}{dx}\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \right] = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$ (הכללה של מה שעשינו בכיתה).

5. בהמשך לתרגיל על f פונקציה עולה $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ כך שעבור $r_n :=$ $\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$ ראינו שמתקיים : $0 \le r_n \le \frac{f(1)-f(0)}{n}$.

כעת , <u>**נניח כי f גזירה ברציפות**</u> , **ונוכיח כי קיים :** $\lim_{n\to\infty} n \cdot r_n = \frac{f(1)-f(0)}{2}$ –בעזרת השלבים הבאים :

a. נגדיר : $F_k(x) := \int_{\frac{k}{n}}^{x} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt$. אז קיים : $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

בעזרת פיתוח טיילור הראו כי מתקיים : $F_k(x) = \frac{f^{(1)}(c)(x-\frac{k}{n})^2}{2}$, עבור נקודה c מתאימה כלשהיא

b. הראו כי קיים : $n \cdot r_n = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f^{(1)}(c_k)$ עבור נקודות $\frac{k}{n} \le c_k \le \frac{k+1}{n}$.

c. $f^{(1)}$ רציפה ולכן אינגרבילית , ומכאן שהראו בעזרת סכום רימן של פונקציה מתאימה את קיום הגבול הדרוש !

6. תהי f גזירה ברציפות הוכח ש $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx = 0$

7. תהי f רציפה. לכל $\varepsilon > 0$ נגדיר $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t)dt$

a. הוכח ש $g_\varepsilon(x)$ גזירה

b. הוכח שלכל x מתקיים $\lim_{\varepsilon \to 0^+} g_\varepsilon(x) = f(x)$

8. הוכיחו שלמשוואה $\int_0^x e^{-t^2} dt = x$ יש פתרון אחד ויחיד. מהו?