פתרון תרגיל 2

1. השתמשו בהגדרת הגבול על מנת להוכיח :

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+2}\neq\frac{1}{3}$

הוכחה:

צריך למצוא $\varepsilon>0$, כך שלכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיים $n>n_0$ כך ש- $\left|\frac{5n-7}{n+2}-\frac{1}{3}\right|>\varepsilon$.

אי השיוויון האחרון מתקיים , אם ורק אם , $\left|\frac{15n-21-n-2}{3(n+2)}\right|>\varepsilon$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{14n-23}{3(n+2)}\right|>\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\frac{14n-23}{3(n+2)}>\varepsilon\quad\forall n\geq 2$$

$$\Leftrightarrow 14n-23>3\varepsilon(n+2)$$

$$\Leftrightarrow n(14-3\varepsilon)>6\varepsilon+23$$

נקח $0<\varepsilon<\frac{14}{3}$, במקרה זה צריך להתקיים $n>\frac{6\varepsilon+23}{14-3\varepsilon}$.

ואז לכל $n_0\in\mathbb{N}$ נוכל לבחור $n>n_0+\frac{6\varepsilon+23}{14-3\varepsilon}>n_0$.

לסיכום :

קיבלנו שלכל $0<\varepsilon<\frac{14}{3}$ ולכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיים $n>n_0+\frac{6\varepsilon+23}{14-3\varepsilon}>n_0$ כך ש- $\left|\frac{5n-7}{n+2}-\frac{1}{3}\right|>\varepsilon$

$\Leftarrow\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+2}\neq\frac{1}{3}$.

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+2}=5$

יהי $\varepsilon>0$, צריך למצוא $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left|\frac{5n-7}{n+2}-5\right|<\varepsilon$.

אי השיוויון האחרון מתקיים אם ורק אם , $\left|\frac{5n-7-5n-10}{n+2}\right|<\varepsilon$.

$$\Leftrightarrow\frac{17}{n+2}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon(n+2)>17$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{17-2\varepsilon}{\varepsilon}$$

נקח $n_0=\left[\frac{17-2\varepsilon}{\varepsilon}\right]$, ואז לכל $n>n_0$ מתקיים $\left|\frac{5n-7}{n+2}-5\right|<\varepsilon$ כדרוש .

2. הוכיחו או הפריכו :

א. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=l$, אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת .

הטענה לא נכונה .

דוגמא נגדית : $\{a_n\}_{\infty}=\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\right|=1$, אבל $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת .

ב. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=l$, אזי $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|l|$.

הטענה נכונה

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$ צריך למצוא $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $\left||a_n|-|l|\right|<\varepsilon$.

נתון : $\lim_{n\to\infty}a_n=l$ ולכן עבור $\varepsilon>0$ נתון קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-l|<\varepsilon$,

לכל x,y מתקיים $\left||x|-|y|\right|\le|x-y|$ ולכן $\left||a_n|-|l|\right|\le|a_n-l|<\varepsilon$ כדרוש.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}a_n=l$, אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>0$.

הטענה לא נכונה .

דוגמא נגדית :

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

אבל לכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיים $n>n_0$ כך ש- $a_n<0$. (לכל $n_0\in\mathbb{N}$ $a_{2n_0+1}<0$) .