

מד"ח תרגיל 4

1. נתונה משוואת הגלים:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = A e^{\alpha x + \beta t}, & -\infty \leq x \leq \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x & , -\infty \leq x \leq \infty \\ u_t(x, 0) = \sin(x) & , -\infty \leq x \leq \infty \end{cases}$$

(כאשר A, α, β קבועים שונים מ-0) מצאו $u(x, t)$ מבלי להשתמש בנוסחת דלמבר מקרה לא-הומוגני. (רמז: הציגו את $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ כאשר: $v(x, t)$ פותרת את החלק ההומוגני של משוואת הגלים ובנוסף $v(x, t)$ מקבלת את כל תנאי ההתחלה של $u(x, t)$, כמו כן חפשו את: $w(x, t) = B(t)e^{\alpha x + \beta t}$, מצאו מה צריכה להיות $B(t)$. (התחשבו במקרים שונים של ערכי α, β).

2. בעקבות פיצוץ נוצר גל הדף המקיים את המשוואה:

$$\begin{cases} p_{tt} - 16p_{xx} = 0 & , -\infty \leq x \leq \infty, \quad t > 0 \end{cases}$$

כאשר $p(x, t)$ הוא הלחץ בנקודה x בזמן t . תנאי ההתחלה שנוצרו בפיצוץ הם:

$$p(x, 0) = \begin{cases} 10 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$p_t(x, 0) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

בנקודה $x_0 = 10$ נמצא מבנה נקודתי. המנהדס שתכנן את המבנה קבע שיחזיק מעמד בלחצים המקסימיים $p < 6$. מצאו את הזמן t_0 בו הלחץ במבנה כתוצאה מהפיצוץ הוא מקסימלי. האם המבנה יתמוטט?

3. פתרו את בעיית ההתחלה-שפה למיתר "חצי-אינסופי" חופשי:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & , 0 \leq x \leq \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & , 0 \leq x \leq \infty \\ u_t(x, 0) = g(x) & , 0 \leq x \leq \infty \\ u_x(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

כאשר $f \in C^2([0, \infty))$ ו- $g \in C^1([0, \infty))$. המקיימות את תנאי התואמות (קומפטביליות) $f_+(0) = g_+(0)$, רמז: הפתרון ניתן ע"י הרחבה זוגית של f ושל g לפונקציות \tilde{f} ו \tilde{g} המוגדרות על כל הישר, מציאת הפתרון לבעיית קושי המתקבלת (מיתר אינסופי עם תנאי התחלה \tilde{f} ו \tilde{g}) וצימצום הפתרון לרבע המישור $x \geq 0$ ו $t > 0$.

4. פתור את בעיית קושי האי הומוגנית הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = e^x + e^{-x} & , -\infty \leq x \leq \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 & , -\infty \leq x \leq \infty \\ u_t(x, 0) = \cos(x) & , -\infty \leq x \leq \infty \end{cases}$$

מצאו את $u(x, t)$ (מותר להיעזר בנוסחת דלמבר מקרה לא-הומוגני). ב. איזה תכונה יש לפתרון שמצאת לכל זמן $t \geq 0$?