

תרגיל 5

1. יהא X מ"ט ו A תמ"ט. הוכיחו כי S סגורה ב A אם קיימת סגורה S' ב X כך ש $S = A \cap S'$.

2. הוכיחו ש- (X, τ_{cof}) תמיד ספרבילית. בנוסף, מצאו מתי (X, τ_{coc}) ספרבילית.

3. תהי $(P, <)$ קבוצה סדורה לינארית עם טופולוגיית הסדר. הוכיחו את משפט הסנדוויץ: אם $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P$ סדרות כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$$

וגם

$$L := \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} z_n$$

אז מתקיים ש- $\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = L$.

בונוס: נסחו טענה דומה על רציפות פונקציות והוכיחו אותה.

4. יהיו (X, d) ו- (Y, ρ) שני מרחבים מטריים ותהיה $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ פונקציה על. נניח גם שקיימים $M \in \mathbb{R}^{>0}$ כך ש-

$$\forall x, y \in X : md(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$$

הוכיחו ש- f היא הומאומורפיזם.

5. תהא $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{2\}\}$ טופולוגיה על \mathbb{R} . נגדיר $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ שמוגדרת על ידי $f(x) = 2x$. מצאו באלו נקודות f רציפה.

6. מצאו τ על \mathbb{R} כך שחיבור של רציפות $f, g : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ אינה רציפה.

7. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $A \subseteq X$. נגדיר את $1_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ לפי

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- (א) הוכיחו ש- 1_A רציפה בדיוק ב- $X \setminus \partial(A)$
 (ב) הסיקו ש- 1_A רציפה אם ורק אם A היא סגורה.
 (ג) הוכיחו ש- $X \setminus \partial(A) = \text{int}(A) \cup \text{int}(A^c)$

8. נניח ש- $(Q, <)$, $(P, <)$ הן קבוצה סדורה לינארית ונסתכל על טופולוגיית הסדר. נניח בנוסף ש- $f : P \rightarrow Q$ הינה פונקציה מונוטונית.

- (א) הוכיחו או הפריכו שקבוצת נקודות אי הרציפות של f היא דלילה.
 (ב) האם תשובתכם תשתנה אם $(Q, <) = ([0, 1], <)$?

9. יהיו X ו- Y מרחבים טופולוגיים ויהיו $\{C_i\}_{i=1}^n$ כיסוי סגור של X . נניח בנוסף ש- $f_i : C_i \rightarrow Y$ פונקציה רציפה יחסית לטופולוגיית תת המרחב. נניח לבסוף שהפונקציות קוהרנטיות, כלומר שלכל $1 \leq i \neq j \leq n$ ו- $x \in C_i \cap C_j$ מתקיים $f_i(x) = f_j(x)$. הוכיחו שהפונקציה $f : X \rightarrow Y$ שמוגדרת ע"י

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & x \in C_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in C_n \end{cases}$$

היא רציפה (אין צורך להראות שהיא מוגדרת היטב). הראו גם שאם C_i לא סגורות אז הטענה לא נכונה.
 הערה: הטענה נכונה גם כשמדובר על קבוצות פתוחות.
 הערה 2: זכרים את פונקציית קולץ מהתרגול הראשון? הפונקציה $f : (\mathbb{Z}, d_2) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_2)$ שמוגדרת ע"י:

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in 2\mathbb{Z} \\ 3n + 1 & n \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

עכשיו ברור שהיא רציפה.

10. קבעו אם הקבוצות הבאות צפופות וגם אם הן דלילות

- (א) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
 (ב) $A := \{f \in C[0, 1] \mid \exists \alpha > 0 \forall 0 \leq x \leq \alpha : f(x) = 0\} \subseteq C[0, 1]$ עם מטריקת d_1 , כלומר קבוצת כל הפונקציות הרציפות שמתאפסות בסביבה של 0.
 (ג) $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ (כלומר קבוצת המטריצות ההפיכות)
 (ד) $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ כלומר קבוצת המטריצות עם דטרמיננטה 1.

(ה) $5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה-3-אדית

(ו) אתגרים

i. $\left\{ \frac{a^n}{b^m} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{>0}$ עבור $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

א'. רמז: e הוא טרנסנדנטלי - כלומר אין פולינום במקדמים רציונלים שמאפס אותו

ב'. רמז 2: משפט קרונקר

ii. $\mathbb{P} := \{q \in \mathbb{Z} \mid q \text{ is prime}\} \subseteq \mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה- p -אדית.

א'. רמז: משפט דריכלה

11. השלימו את הטבלה הבאה:

ספרבילי	מרחב טופולוגי
	המרחב הדיסקרטי
	הטופולוגיה הטריוויאלית
	\mathbb{R}^n
	$[0, 1]$
	(\mathbb{Z}, d_p)
	(\mathbb{Q}, d_p)
	(\mathbb{Z}, d_p)
	(\mathbb{Q}, d_p)
	l_1
	l_2
	l_∞
	$(C[0, 1], d_\infty)$
	$(C[0, 1], d_1)$
	$(\{a, b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$
	עבור X אין סופי (X, τ_{cof})
	עבור X לא בן מניה (X, τ_{coc})
	$([0, 1]^2, \tau_{\text{lex}})$