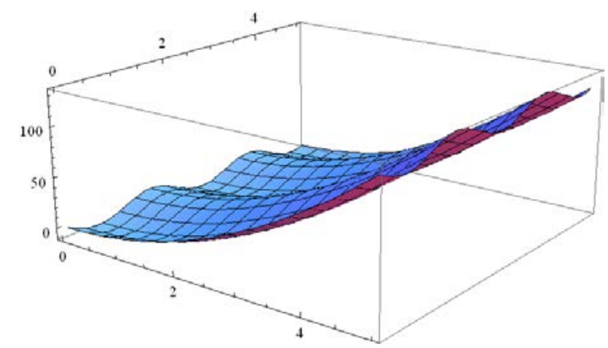
תרגול 2 – אינפי 4

תבניות

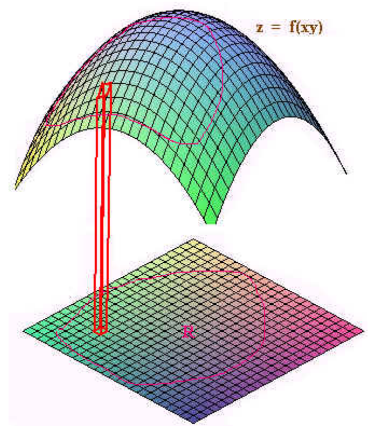
על מנת להסביר את המוטיבציה מאחורי התבניות יש להבין את הבעיה. נניח שאנו רוצים לחשב את שטח הפנים S של הגרף של פונקציה מסויימת, למשל $f(x,y)=5x^2-9\sin(3y)$. אז הגרף של הפונקציה נמצא ב$\mathbb{R}^3$, אך ברור כי אין לו נפח ולכן לא נוכל לבצע אינטגרציה ב $\mathbb{R}^3$.



אחת מהדרכים שבהן ניתן לפתור בעיה זו היא לחלק את מישור (x,y) לריבועים קטנים r_i , ולהסתכל על הצמצום של $R_i=\left(x,y,f(x,y)\right)\Big|_{(x,y)\in r_i}$ על הריבוע r_i . עבור r_i עם שטח מאוד קטן נקבל כי R_i הינו מקבילון קטן. נסמן את היחס $\frac{R_i}{r_i}=g_i$, ונקבל כי

$$\sum g_i r_i=\sum R_i=S$$

כלומר, $\int g(x,y)dxdy=S$ כאשר $g(x,y)$ מסמן באופן אינטיווטיבי את יחס המקבילון לריבוע בנקודה (x,y) . כלומר, על מנת למצוא את השטח S עלינו לדעת מהי הפונקציה $g(x,y)$. אנו נראה בהמשך כי תבניות דיפרנציאליות נותנות לנו למעשה את הפונקציה $g(x,y)$.



תזכורת: פונקציה מולטילינארית ב $\left(\mathbb{R}^n\right)^k$ הינה פונקציה $M:\left(\mathbb{R}^n\right)^k \to \mathbb{R}$ אשר לינארית בכל אחד מהרכיבים שלה. כלומר

$$M\left(a_1,a_2,...,a_i+ca'...,a_k\right)=M\left(a_1,a_2,...,a_i,...,a_k\right)+cM\left(a_1,a_2,...,a',...,a_k\right)$$

לכל $1\le i\le k$. כאשר $a_i\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}$.

דוגמא: מכפלה פנימית ב $\mathbb{R}^n$ - $\langle u,v\rangle:\left(\mathbb{R}^n\right)^2\to\mathbb{R}$ הינה פונקציה מולטילינארית. שכן מתקיים $\langle u,v+cw\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,cw\rangle$ וכן $\langle v+cw,u\rangle=\langle v,u\rangle+\langle cw,u\rangle$.

פונקציה מולטילינארית M תקרא מתחלפת (alternating) אם בנוסף $M\left(a_1,a_2,...,a_k\right)=0$ כאשר $a_i=a_j$ עבור $i\ne j$. קל לראות כי מתקיימות התכונות הבאות:

i. $M\left(a_1,a_2,...,a_k\right)=0$ כאשר הוקטורים a_i הינם תלויים לינארית.

ii. $M\left(a_1,a_2,...,a_j,...,a_i,...,a_k\right)=-M\left(a_1,a_2,...,a_i,...,a_j,...,a_k\right)$, כלומר פרמוטציית חילוף של שני וקטורים תגרום להפיכת סימן.

נסמן ב $\mathbf{i}=\left(i_1,i_2,...,i_k\right)$ את ה k-יה של אינדקסים כך ש $1\le i_r\le n$. נגדיר את הפונקציה

$$dx_{\mathbf{i}}\left(a_1,...,a_k\right)=\begin{vmatrix} a_{i_1}^1 & a_{i_1}^2 & \dots & a_{i_1}^k \\ \vdots & & & \\ a_{i_k}^1 & a_{i_k}^2 & \dots & a_{i_k}^k \end{vmatrix}$$

כלומר, הדטרמיננטה של המטריצה A המתקבלת מסידור השורות עם האינדקס שב $\mathbf{i}$ של המטריצה $\left(a^1, a^2, ..., a^k\right)$ (מחיקת כל השורות שאינן נמצאות ב $\mathbf{i}$).

דוגמא: חשבו את $dx_{\mathbf{i}}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \\ 6 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ כאשר $\mathbf{i} = (3,4)$ ו $\mathbf{i} = (4,3)$.

$\mathbf{i} = (3,4)$: נבנה את המטריצה A המתאימה

$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. כלומר, לקחנו את שתי השורות האחרונות (3,4) של $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \\ 6 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. כעת

$$dx_{\mathbf{i}}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \\ 6 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \det(A) = \left|\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right| = 30 - 0 = 30 .$$

$\mathbf{i} = (4,3)$: באותו אופן נקבל כי $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ ולכן $dx_{\mathbf{i}}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \\ 6 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \det(A) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\right| = -30$.

קל לראות כי $dx_{\mathbf{i}}$ הינה פונקציה מולטילינארית על $\left(\mathbb{R}_n\right)^k$ או במילים אחרות k מולטילנארית .
למעשה ניתן להראות כי כל פונקציה k מולטילינארית על $\mathbb{R}_n$ הינה מהצורה

$M\left(a^1, ..., a^k\right) = \sum_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{i}} dx_{\mathbf{i}}\left(a^1, ..., a^k\right)$ כאשר $\mathbf{i}$ הינה k-יה עולה כלומר $i_j < i_l \Leftrightarrow j < l$ עבור $i_j, i_l \in \mathbf{i}$ ו $c_{\mathbf{i}}$ הינם סקלרים . קל לבדוק כי $c_{\mathbf{i}} = M\left(e^{i_1}, ..., \mathrm{e}^{i_k}\right)$ כאשר e^i הינו הוקטור אשר מקבל 1 ברכיב ה i ואפס בשאר הרכיבים. ל M קוראים גם k תבנית .

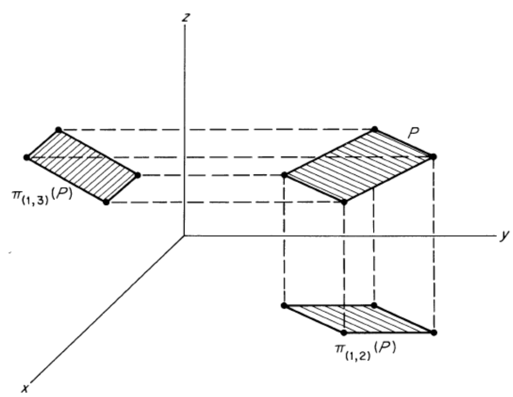
הערה : ניתן להראות כי פוקנציית הדטרימיננטה הינה הפונקציה ה k מולטילינארית היחידה שמקיימת $M\left(e^1, ..., e^n\right) = 1$.

נשים לב כי אם $M = dx_i$ כאשר $1 \le i \le n$, נקבל כי M הינו למעשה ההיטל של הוקטור על ציר x_i , ולמעשה, $\left|M(v)\right| = \left(\left(dx_i(v)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ הינו גודל ההיטל של הוקטור v על ציר זה. עפ"י משפט

פיתגורס נקבל כי $|v|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(dx_i\left(v\right)\right)^2}$. ניתן להרחיב תוצאה זו בצורה כללית יותר. נסתכל על המקבילון ה k ממדי הנוצר מהוקטורים $a^1,a^2,...,a^k$ ונסמן את הנפח שלו ב V. מתקיים ש

$$V=\sqrt{\sum_{\mathbf{i}}\left(dx_{\mathbf{i}}\left(a^1,a^2,...,a^k\right)\right)^2}$$

כלומר אנו סוכמים את ריבועי ההיטלים של המקבילון על כל אחד מהמישורים ה k מימדיים השונים.



דוגמא: מצאו את נפח(שטח) המקבילון הנוצר מהוקטורים $a^1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},a^2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

פתרון: ריבוע שטח היטל המקבילון על ציר $x-y$ הינו $1=\left(\det\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\right)^2=\left(dx_{1,2}\left(a^1,a^2\right)\right)^2$.

ריבוע שטח היטל המקבילון על ציר $x-z$ הינו $4=\left(\det\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}\right)^2=\left(dx_{1,2}\left(a^1,a^2\right)\right)^2$.

ריבוע שטח היטל המקבילון על ציר $y-z$ הינו $4=\left(\det\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\right)^2=\left(dx_{1,2}\left(a^1,a^2\right)\right)^2$. ולכן נקבל כי שטח המקבילון הינו $\sqrt{33}=\sqrt{1^2+4^2+4^2}$.