ב"א אנליזה 1 תשפ מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0} \sin(2x)\cdot\frac{e^{2x}-e^x}{1-\cos(x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0} \sin(2x)\cdot\frac{e^{2x}-e^x}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}\cdot\frac{e^{2x}-e^x}{x}\cdot\frac{2x\cdot x}{x^2}$$
$$= 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2 = 4$$

כאשר הגבול האחרון מחושב

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+1-e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x} = 2-1 = 1$$

(ב) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n = \frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$ ואז

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2+1-1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{n}{n+3}} = \left[e^{-1}\right]^1 = e^{-1}$$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n+n}$

פתרון: נראה כי $\frac{n}{2^n}\to 0$ ואז

$$\frac{n}{2^n+n} = \frac{n}{2^n}\frac{1}{(1+\frac{n}{2^n})} \to 0\cdot\frac{1}{(1+0)} = 0$$

אכן: נשתמש בכלל המנה ונגדיר $a_n = \frac{n}{2^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)}{n} \to \frac{1}{2}$$

וכיוון ש $\frac{1}{2} < 1$ נקבל ש $\lim a_n = 0$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & x\neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = a$$

לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin(2x)}{2x} = 2$$

ולכן רק עבור $a = 2$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a = 2$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x = 0$) אם f גזירה ב $x = 0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^2} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - 2}{2x} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin(2x)}{2} = 0$$

כלומר f גזירה ב $x = 0$ ומתקיים $f'(0) = 0$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}$ לכל n טבעי, וכן נתון כי $a_1 = 2$.

(א) הוכיחו כי הסדרה a_n יורדת.

פתרון: "נשחק" עם ההגדרה

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n+1}{a_n}} = 1 + \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}$$

כעת נרצה להוכיח כי $a_{n+1} \le a_n$ כלומר

$$\frac{2a_n + 1}{a_n + 1} \le a_n$$

שזה שקול ל $2a_n + 1 \le a_n(a_n + 1)$ כי הסדרה a_n חיובית ולכן הכפלנו במשהו חיובי (הוכחה ש a_n חיובית: $a_1 = 2$ חיובי ואם a_n חיובי גם $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}$ חיובי). כלומר, רוצים להוכיח לכל n כי

$$0 \le a_n^2 - a_n - 1$$

נסתכל בפולינום $p(x) = x^2 - x - 1$ ונרצה להוכיח כי $p(a_n) \ge 0$. חיתוך ציר x של $p(x)$ מתקבל בנקודות

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ומכיוון שזה פרבולה צוחקת נקבל שבתחום $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ הפולינום שלילי ובתחום $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$ הפולינום חיובי. לכל בשביל להוכיח כי $p(a_n)\geq 0$ מספיק להוכיח כי לכל n מתקיים $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq a_n$. נסמן $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1=2$ ומתקיים $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $L\leq a_n$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $L\leq a_{n+1}$. לפי הנחת האינדוקציה $L\leq a_n$ ולכן $\frac{1}{L}\geq\frac{1}{a_n}$ ולכן $1+\frac{1}{L}\geq\frac{1}{a_n}+1$ ולכן $\frac{1}{1+\frac{1}{L}}\leq\frac{1}{\frac{1}{a_n}+1}$ ולכן, לפי הגדרת הסדרה, נקבל:

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}\geq 1+\frac{1}{1+\frac{1}{L}}\underbrace{=}_{\text{כמו החישוב מההתחלה}}\frac{2L+1}{L+1}=1+\frac{L}{L+1}\underbrace{=}_{0=p(L)=L^2-L-1}1+\frac{L}{L^2}=1+\frac{1}{L}=\frac{1+L}{L}\underbrace{=}_{0=p(L)=L^2-L-1}\frac{L^2}{L}=L$$

וקיבלנו ש $a_{n+1}\geq L$ כנדרש.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

פתרון: ראינו בסעיף הקודם כי a_n יורדת וגם שמתקיים $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq a_n$ ולכן חסומה מלמטה ולכן יש לה גבול סופי L (אין הנחה שזה אותו L מסעיף קודם אבל עוד רגע זה מה שיקרה). כלומר $a_n\to L$ ולכן $a_{n+1}\to L$ ואז לפי הגדרת הסדרה

$$L\leftarrow a_{n+1}=\frac{2a_n+1}{a_n+1}\to\frac{2L+1}{L+1}$$

ואז כמו חישובים ממקודם נקבל ש $L^2-L-1=0$ ולכן $L=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. האפשרות $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ נפסלת כי $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq a_n$ ולכן $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq L$ ולכן קיבלנו אופציה בודדת ל L שהיא $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ וזה גבול הסדרה.

4. קבעו לכל ערך $a\in\mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $\ln(x)=x+a$ (הפרידו למקרים של a).

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x)=\ln(x)-x-a$$

שמוגדרת רק עבור $x>0$ (בגלל ln) ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

ולכן, 1 היא הנקודה היחידה בה $f'=0$ ו 0 היא הנקודה היחידה בה f' אינה מוגדרת. מהטבלה

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	UD	$+$	0	$-$

נסיק כי f יורדת ממש בקרן $(1,\infty)$ועולה ממש בקטע $(0,1)$ ולכן בקטע/קרן הנ"ל f יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר x (כלומר שורש אחד לכל היותר).

בנוסף: מתקיים כי

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(x)-x-a=\{-\infty-0-a\}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\ln(x)-x-a=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1-\frac{a}{x}\right)=\{\infty\cdot(0-1-0)\}=-\infty$$

כאשר הגבול באינסוף חושב עם הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

ולכן קיימים $0<c<1$ ו $1<d$ כך ש $f(c)<0,f(d)<0$. כעת $f(1)=-1-a$ ולכן:

- עבמידה ו $-1-a>0$ (כלומר $-1>a$) נקבל ש $f(1)>0$ ובקטעים $[c,1]$ וב $[1,d]$ הפונקציה מחליפה סימן. מכיוון שהיא רציפה בקטעים סגורים אלו, לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת שמה - כלומר קיים לה בכל קטע שורש והשורש לא מתקבל ב 1 ולכן אלו שני שורשים שונים. מכיוון שבכל קטע יש לה לכל היותר שורש אחד נסיק שיש לה בדיוק שורש אחד בכל קטע ולכן במקרה זה ($-1>a$) יהיו 2 פתרונות בדיוק.
- במידה ו $-1-a=0$ (כלומר $a=-1$) נקבל כי $f(-1)=0$ וזוהי הנקודה היחידה בה f מתאפסת (מאותו נימוק: בקטעים $[c,1]$ וב $[1,d]$ הפונקציה מתאפסת לפחות פעם אחת ולכל היותר פעם אחת ולכן הנקודה שהיא מתאפסת זהה בשני הקטעים וזוהי הנקודה 1).
- במידה ו $-1-a<0$ (כלומר $-1<a$) נקבל ש $f(1)<0$ ומכיוון ש f יורדת ממש בקרן $(1,\infty)$ועולה ממש בקטע $(0,1)$ נסיק כי 1 נקודת מקסימום גלובלי של הפונקציה והערך שמה שלילי ולכן גרף הפונקציה כולו מתחת לציר x ולכן במקרה זה לא יהיו שורשים.

5. תהיא f פונקציה שגזירה בכל $\mathbb{R}$ וגם שנגזרתה, f', רציפה בכל $\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם יש נקודה יחידה $a\in\mathbb{R}$ עבורה $f'(a)=0$ אזי a נקודת קיצון מוחלט.
פתרון: הפרכה: $f(x)=x^3$ מקיימת כי $f'(x)=3x^2$ קיימת ורציפה בכל הממשיים. מתאפסת רק ב $x=0$אבל 0 אינה נקודת קיצון (מימין לה הפונקציה חיובית ומשמאל לה שלילית).

(ב) הוכיחו: שאם $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ אזי קיימת נקודה $a\in\mathbb{R}$ עבורה $f'(a)=0$.
פתרון: הוכחה: נסמן $y_0=f(0)$. כיוון ש $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ קיימות $d_1<0,0<c_1$ כך ש

$$f(c_1)>y_0+1$$
$$f(d_1)>y_0+1$$

ומכיוון ש f רציפה בקטע $[0,d_1]$ ובקטע $[0,c_1]$ אז לפי ערך הביניים קיימות $c_2\in[0,c_1]$ ו $d_2\in[d_2,0]$ כך ש

$$f(c_2)=f(d_2)=y_0+1$$

ו $c_2,d_2\neq 0$ ולכן שונות זו מזו. כעת, לפי משפט לגרנז' קיימת $a\in[d_2,c_2]$ כך ש

$$f'(a)=\frac{f(c_2)-f(d_2)}{c_2-d_2}=\frac{0}{c_2-d_2}=0$$

כמו שרצינו.