

## ב"א אנליזה 1 תשפ מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) \cdot \frac{e^{2x} - e^x}{1 - \cos(x)} \quad (\text{א})$$

**פתרון:** נציג את הגבול כמכפלה של גבולות ידועים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) \cdot \frac{e^{2x} - e^x}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos(x)} \cdot \frac{e^{2x} - e^x}{x} \cdot \frac{2x \cdot x}{x^2} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

כאשר הגבול האחרון מחושב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 + 1 - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^n \quad (\text{ב})$$

**פתרון:** נשתמש בכלל המנה, נגדיר  $a_n = \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}$  ואז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2+1-1}{n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n+3} \right)^{n+3} \right]^{\frac{n}{n+3}} = [e^{-1}]^1 = e^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n + n} \quad (\text{ג})$$

**פתרון:** נראה כי  $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$  ואז

$$\frac{n}{2^n + n} = \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n}{2^n}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{(1+0)} = 0$$

אכן: נשתמש בכלל המנה ונגדיר  $a_n = \frac{n}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

וכיון ש  $\frac{1}{2} < 1$  נקבל ש  $\lim a_n = 0$

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי  $a$  הפונקציה  $f(x)$  רציפה ב  $x = 0$ ?  
**פתרון:** על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב  $x = 0$  צריך להתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = a$$

לכל  $a$ , מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$$

ולכן רק עבור  $a = 2$  מתקיים השוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי  $a$  הפונקציה  $f(x)$  גזירה ב  $x = 0$ ? מהי  $f'(0)$  במקרים אלו?  
**פתרון:** פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור  $a = 2$  (שזה המקרה היחיד בו  $f$  רציפה ב  $x = 0$ ) אם  $f$  גזירה ב  $x = 0$ . לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) - 2}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin(2x)}{2} = 0$$

כלומר  $f$  גזירה ב  $x = 0$  ומתקיים  $f'(0) = 0$ .

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$  לכל  $n$  טבעי, וכן נתון כי  $a_1 = 2$ .

(א) הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  יורדת.  
**פתרון:** "נשחק" עם ההגדרה

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n + 1}{a_n}} = 1 + \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}$$

כעת נרצה להוכיח כי  $a_{n+1} \leq a_n$  כלומר

$$\frac{2a_n + 1}{a_n + 1} \leq a_n$$

שזה שקול ל  $2a_n + 1 \leq a_n(a_n + 1)$  כי הסדרה  $a_n$  חיובית ולכן הכפלנו במשהו חיובי (הוכחה ש  $a_n$  חיובית:  $a_1 = 2$  חיובי ואם  $a_n$  חיובי גם  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$  חיובי). כלומר, רוצים להוכיח לכל  $n$  כי

$$0 \leq a_n^2 - a_n - 1$$

נסתכל בפולינום  $p(x) = x^2 - x - 1$  ונרצה להוכיח כי  $p(a_n) \geq 0$ . חיתוך ציר  $x$  של  $p(x)$  מתקבל בנקודות

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ומכיוון שזה פרבולה צוחקת נקבל שבתחום  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  הפולינום שלילי ובתחום  $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$  הפולינום חיובי. לכל בשביל להוכיח כי  $p(a_n) \geq 0$  מספיק להוכיח כי לכל  $n$  מתקיים  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq a_n$ . נסמן  $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס  $n = 1$ : נתון ש  $a_1 = 2$  ומתקיים  $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 2$ .
- צעד - נניח נכונות עבור  $n$ , כלומר  $L \leq a_n$ . נוכיח נכונות עבור  $n + 1$ , כלומר  $L \leq a_{n+1}$ . לפי הנחת האינדוקציה  $L \leq a_n$  ולכן  $\frac{1}{L} \geq \frac{1}{a_n}$  ולכן  $1 + \frac{1}{L} \geq 1 + \frac{1}{a_n}$  ולכן  $\frac{1}{1+\frac{1}{L}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}$  ולכן, לפי הגדרת הסדרה, נקבל:

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} \geq 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{L}} \stackrel{\text{כמו החישוב מההתחלה}}{=} \frac{2L+1}{L+1} = 1 + \frac{L}{L+1} \stackrel{0=p(L)=L^2-L-1}{=} 1 + \frac{L}{L^2} = 1 + \frac{1}{L} = \frac{1+L}{L} \stackrel{0=p(L)=L^2-L-1}{=} \frac{L^2}{L} = L$$

וקיבלנו ש  $a_{n+1} \geq L$  כנדרש.

(ב) חשבו את גבול הסדרה  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**פתרון:** ראינו בסעיף הקודם כי  $a_n$  יורדת וגם שמתקיים  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq a_n$  ולכן חסומה מלמטה ולכן יש לה גבול סופי  $L$  (אין הנחה שזה אותו  $L$  מסעיף קודם אבל עוד רגע זה מה שיקרה). כלומר  $a_n \rightarrow L$  ולכן  $a_{n+1} \rightarrow L$  ואז לפי הגדרת הסדרה

$$L \leftarrow a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1} \rightarrow \frac{2L + 1}{L + 1}$$

ואז כמו חישובים ממקודם נקבל ש  $L^2 - L - 1 = 0$  ולכן  $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . האפשרות  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  נפסלת כי  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq a_n$  ולכן  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq L$  ולכן קיבלנו אופציה בודדת ל  $L$  שהיא  $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  וזה גבול הסדרה.

4. קבעו לכל ערך  $a \in \mathbb{R}$  כמה פתרונות יש למשוואה  $\ln(x) = x + a$  (הפרידו למקרים של  $a$ ).  
**פתרון:** נגדיר פונקציה

$$f(x) = \ln(x) - x - a$$

שמוגדרת רק עבור  $x > 0$  (בגלל  $\ln$ ) ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של  $a$ , כמה שורשים יש ל  $f(x)$ . נגזור

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

ולכן, 1 היא הנקודה היחידה בה  $f' = 0$  ו 0 היא הנקודה היחידה בה  $f' = 0$  אינה מוגדרת. מהטבלה

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	UD	+	0	-

נסיק כי  $f$  יורדת ממש בקרן  $(1, \infty)$  ועולה ממש בקטע  $(0, 1)$  ולכן בקטע/קרן הנ"ל  $f$  יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר  $x$  (כלומר שורש אחד לכל היותר).

בנוסף: מתקיים כי

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - x - a = \{-\infty - 0 - a\} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) - x - a = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{a}{x} \right) = \{\infty \cdot (0 - 1 - 0)\} = -\infty$$

כאשר הגבול באינסוף חושב עם הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \underbrace{=}_{\infty, \text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

ולכן קיימים  $0 < c < 1$  ו  $1 < d < \infty$  כך ש  $f(c) < 0, f(d) < 0$  כעת  $f(1) = -1 - a$  ולכן:

- עמידה ו  $-1 - a > 0$  (כלומר  $-1 > a$ ) נקבל ש  $f(1) > 0$  ובקטעים  $[c, 1]$  וב  $[1, d]$  הפונקציה מחליפה סימן. מכיוון שהיא רציפה בקטעים סגורים אלו, לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת שמה - כלומר קיים לה בכל קטע שורש ושורש זה לא מתקבל ב  $1$  ולכן אלו שני שורשים שונים. מכיוון שבכל קטע יש לה לכל היותר שורש אחד נסיק שיש לה בדיוק שורש אחד בכל קטע ולכן במקרה זה  $(-1 > a)$  יהיו 2 פתרונות בדיוק.

- במידה ו  $-1 - a = 0$  (כלומר  $a = -1$ ) נקבל כי  $f(-1) = 0$  וזוהי הנקודה היחידה בה  $f$  מתאפסת (מאותו נימוק): בקטעים  $[c, 1]$  וב  $[1, d]$  הפונקציה מתאפסת לפחות פעם אחת ולכל היותר פעם אחת ולכן הנקודה שהיא מתאפסת זהה בשני הקטעים וזוהי הנקודה  $1$ .

- במידה ו  $-1 - a < 0$  (כלומר  $-1 < a$ ) נקבל ש  $f(1) < 0$  ומכיוון ש  $f$  יורדת ממש בקרן  $(1, \infty)$  ועולה ממש בקטע  $(0, 1)$  נסיק כי  $1$  נקודת מקסימום גלובלי של הפונקציה והערך שמה שלילי ולכן גרף הפונקציה כולו מתחת לציר  $x$  ולכן במקרה זה לא יהיו שורשים.

5. תהיה  $f$  פונקציה שגזירה בכל  $\mathbb{R}$  וגם שנגזרתה,  $f'$ , רציפה בכל  $\mathbb{R}$ .

(א) הוכיחו/הפריכו: אם יש נקודה יחידה  $a \in \mathbb{R}$  עבורה  $f'(a) = 0$  אזי  $a$  נקודת קיצון מוחלט.  
**פתרון:** הפרכה:  $f(x) = x^3$  מקיימת כי  $f'(x) = 3x^2$  קיימת ורציפה בכל הממשיים. מתאפסת רק ב  $x = 0$  אבל  $0$  אינה נקודת קיצון (מימין לה הפונקציה חיובית ומשמאל לה שלילית).

(ב) הוכיחו: שאם  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  אזי קיימת נקודה  $a \in \mathbb{R}$  עבורה  $f'(a) = 0$ .  
**פתרון:** הוכחה: נסמן  $y_0 = f(0)$ . כיוון ש  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  קיימות  $c > 0, d > 0$  כך ש

$$\begin{aligned} f(c) &> y_0 + 1 \\ f(d) &> y_0 + 1 \end{aligned}$$

ומכיוון ש  $f$  רציפה (כי יש לה נגזרת) בקטע  $[c, d]$  יש לה שם מיני שטן שווה  $y_0$ . לכן המיני הזה הוא מיני מוחלט והנגזרת בו מתאפסת (כי הנגזרת שם קיימת).