# <u>אנליזה מודרנית - פתרונות למבחנים</u>

תש"ע מועד ב':

1.

ג. נראה שחסר $-f\left(a\right)$ באגף ימין. ואז זה נובע מיידית מחלק ב' של הכללת לבג.

ד. ע"פ ג' והגדרת האינטגרל
$f\left(x\right)=f\left(a\right)+\int_a^x f'dm=\left[f\left(a\right)+\int_a^x\left(f'\right)^+dm\right]-\left[\int_a^x\left(f'\right)^-dm\right]$ וכל אחת מהפונקציות בסוגריים המרובעות עולה עם $x$.

2.

ב. לא. ניתן להוכיח כמו בתרגול, עם אותה סדרת חלוקות, שההשתנות אינסופית.

3.

ג. הממ"חים הם $\left(X,S,\mu\right)=\left(Y,T,\nu\right)=\left(\mathbb{N},P\left(\mathbb{N}\right),\#\right)$, והמשפט הוא:

אם $a_{m,n}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית $d\left(\#\times\#\right)$ [כלומר הטור הכפול $\sum_{m,n=1}^{\infty}\left|a_{m,n}\right|$ מתכנס] אזי מתקיים $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{m,n}$. כדי להוכיח את המשפט יש לזכור שאינטגרביליות לפי מידת הספירה פירושה התכנסות בהחלט של הטור הרלוונטי [הוכח בתרגילי הבית]

4.

ב. נראה שיש טעות בשאלה. נתבונן בממ"ח $\left(\left(0,\infty\right),L,m\right)$ ובפונקציה $f\left(x\right)=x^{-1/5}$ המדידה לבג (כי היא רציפה). לכל $\lambda>0$

$$E_\lambda=\left\{x\in\left(0,\infty\right):\left|x^{-1/5}\right|\geq\lambda\right\}=\left\{x\in\left(0,\infty\right):x^{-1/5}\geq\lambda\right\}=\left\{x\in\left(0,\infty\right):x\leq\lambda^{-5}\right\}=\left(0,\lambda^{-5}\right]$$

כך שמתקיים $m\left(E_\lambda\right)=\frac{1}{\lambda^5}$ כדרישות השאלה (עם $M=1$) אבל

$\int_0^\infty\left|f\left(x\right)\right|^3dm\left(x\right)=\int_0^\infty x^{-3/5}dm\left(x\right)$ מתבדר (מאינפי). אנסה לברר עוד בימים הקרובים.

5. ב. ההעתקה $f:M\subset\ell^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f\left(x_1,x_2,\ldots\right)=\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\cdot\frac{1}{n}$ היא לינארית. נוכיח כי היא חסומה:

$\left\|f\left(x_1,x_2,\ldots\right)\right\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}x_n\cdot\frac{1}{n}\right\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\cdot\frac{1}{n}\right|\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}=c\left\|x\right\|$ עבור $c<\infty$. $f$ אינה

מתקבלת ע"י מכפלה פנימית עם שום איבר ב- $M$ (אבל היא כן מתקבלת ע"י מכפלה פנימית עם האיבר $\ell^2 \ni \left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)$ שאינו ב- $M$ ) וזוהי הסתירה.

תשע"א מועד א':

1. ה. תהי $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ סדרה עולה של פונקציות מדידות בממ"ח $(X,S,\mu)$ ויש להוכיח $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ (לכל $x$ $\{f_n(x)\}$ היא סדרה עולה, ולכן קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ושווה $\sup_n f_n(x)$. הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ קיים אף הוא, שכן סדרת המספרים $\int_X f_n d\mu$ עולה).

נוכיח את שני הכיוונים:

$\le$ נובע מייד מפאטו. שכן ניתן להחליף את $\underline{\lim}$ בגבולות הרגילים כי הם קיימים)

$\ge$ יש להוכיח $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \ge \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ או $\int_X \sup_n f_n d\mu \ge \sup_n \int_X f_n d\mu$. ובכן, לכל $n$ מתקיים $\sup_n f_n \ge f_n$ ניקח אינטגרל על א"ש זה לקבל שלכל $n$, $\int_X \sup_n f_n d\mu \ge \int_X f_n d\mu$ ניקח sup על א"ש זה לקבל את הדרוש.

2. עשינו.

3. עשיתם.

4. ירד במיקוד!

תשע"א מועד ב':

1. בקרוב.

2. עשינו.

3.

ג. הופיע ברשימת התרגילים למבחן בשנים קודמות, אך השנה לא. לדעתי זה לא יהיה במבחן – ואם תרצו (ויישאר זמן) אוכל לפתור בסוף.

ד. בקרוב.

תשע"ב מועד א':

1.

ה. בגלל שמדובר בקטע סגור גם $fg$ רציפה בהחלט, וע"פ הכללת לבג היא מקיימת את נוסחת ניוטון לייבניץ: $\int_{[a,b]} (fg)' dm = (fg)(b) - (fg)(a)$ כל שנותר לעשות הוא להשתמש בכלל המכפלה לנגזרות ולהעביר אגף.

.2

ד. נוכיח או"א

$\Rightarrow$ נניח כי $f_{n_0}$ אינטגרבילית. נגדיר סדרה חדשה של פונקציות $g_n = f_{n_0} - f_n$ מאחר וסדרת הפונקציות $f_n$ היא יורדת, מתקיים כי $\{g_n\}$ היא סדרה עולה של פונקציות (מדידות ו-) אי-שליליות (החל מהאינדקס $n_0$ ) ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג:

$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n d\mu$ או $\lim_{n\to\infty}\int_X \left(f_{n_0} - f_n\right)d\mu = \int_X \left(f_{n_0} - f\right)d\mu$ או

$\int_X f_{n_0}d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f_{n_0}d\mu - \int_X fd\mu$ כנדרש.

$\Leftarrow$ נניח בשלילה כי לכל $n$ $f_n$ אינה אינטגרבילית. כלומר $\int_X |f_n| d\mu = \infty$ ע"י לקיחת גבול נקבל $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n| d\mu = \infty$ וע"פ ההנחה $\int_X |f| d\mu = \infty$ בסתירה לאינט' של $f$ .