תרגיל 9

1. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות f_n חיוביות עולות ואינטגרביליות רימן אשר מתכנסות נקודתית לפונקציה f חסומה אך איננה אינטגרבילית רימן. תרגיל זה מראה כי משפט ההתכנסות המונוטונית ומשפט ההתכנסות החסומה איננו תקף עבור אינטגרלי רימן.

פתרון: נסתכל על הקטע $[0,1]$ ונסדר את $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ בסדרה $\{q_n\}$. נגדיר את הפונקציות הבאות:

$$f_n=\begin{cases}1 & x\in\{q_1,q_2,...,q_n\}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

ברור כי נקודתית, הסדרה f_n מתכנסת לפונקצית דריכלה. כמו כן, עפ"י משפט שלמדנו פונקציה הינה אינטגרבילית רימן אמ"מ היא רציפה כב"מ. ולכן f_n אינטגרבילית לכל n. אבל פונקצית דריכלה איננה רציפה באף נקודה ולכן איננה אינטגרבילית רימן. מכאן שקיימת סדרה של פונקציות אינטגרביליות רימן המתכנסות מונוטונית לפונקציה חסומה אך הפונקציה איננה אינטגרבילית .

2. מצאו פונקציה $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ולא אינטגרבילית לבג אך כך שהאינטגרל רימן הלא אמיתי שלה קיים. כלומר, אנו רוצים ש $\int_0^1|f|dm=\infty$ אבל ש $\lim_{a\to0^+}R\left(f1_{(a,1]}\right)$ קיים.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $f=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1]$.

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{\sin 1/x}{x}dx\overset{y=1/x}{=}\lim_{a\to0^+}\int_1^{1/a}\frac{\sin y}{y}dy=\lim_{a\to0^+}\left(-\frac{\cos}{y}\Big|_1^{1/a}-\int_1^{1/a}\frac{\cos y}{y^2}dy\right)$$

אבל ברור כי $\lim_{a\to0^+}-\frac{\cos(y)}{y}\Big|_1^{1/a}=0$ וגם כי $\lim_{a\to0^+}\int_1^{1/a}\frac{\cos y}{y^2}dy\le\lim_{a\to0^+}\int_1^{1/a}\frac{1}{y^2}dy=\int_1^{\infty}\frac{1}{y^2}dy<\infty$ ולכן האינטגרל קיים.

לעומת זאת, לכל $a>0$ הפונקציה f רציפה בקטע $(a,1)$ ולכן נובע כי היא אינטגרבילית רימן ולבג . עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית והעובדה שכאשר אינטגרל רימן קיים אזי הוא שווה לאינטגרל לבג נובע כי

$$\int_0^1\left|\frac{\sin 1/x}{x}\right|dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\left|\frac{\sin 1/x}{x}\right|dx=\lim_{a\to0^+}\int_0^1\left|\frac{\sin 1/x}{x}1_{(a,1]}(x)\right|dx\overset{y=1/x}{=}\lim_{a\to0^+}\int_0^\infty\left|\frac{\sin y}{y}1_{(1,\frac{1}{a}]}(y)\right|dy$$

$$=\lim_{c\to\infty}\int_0^\infty\left|\frac{\sin y}{y}1_{(1,c]}(y)\right|dy$$

מכיוון שהגבול קיים לכל סדרה שמתכנסת לאינסוף נובע כי

$$\int_1^{\pi(2M+1)}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy+\int_\pi^{\pi(2M+1)}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy$$

$$\le\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dy+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k}\left|\sin y\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dy$$

$$\overset{r=y-2\pi k}{=}\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(r+2\pi k)\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dr$$

$$=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(r)\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dr=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\frac{4}{\pi+2\pi k}$$

נשאיף את M לאינסוף ונקבל כי הטור מתבדר ולכן $\int_0^1|f|dm=\infty$.

3. נניח ו $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, f חסומה על $(a,1]$ לכל $a>0$ ואינטגרל רימן הלא אמיתי $\lim_{a\to0^+}R\left(f1_{(a,1]}\right)$ קיים. הראו כי הגבול שווה ל $\int_0^1 f(x)dm$.

פתרון: מכיוון ש $R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right)$ קיים ומכיוון שהפונקציה f חסומה על $(a,1]$ לכל $\varepsilon>0$ נוכל לבנות סכומי דרבו עליונים אינטגרביליים לבג, כלומר נוכל למצוא חלוקה $P=\{x_0x_1,x_2,...,x_m\}$ ו

$f_n(x)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sup_{x_{i-1}\le y\le x_i}f(y)\right)1_{[x_{i-1},x_i)}(x)$ כך ש $R(f_n)-R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. נסמן $\lim_{a\to0^+}R\left(f1_{(a,1]}\right)=I$ ונובע שלכל $\varepsilon>0$ קיים $I-R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$ וסכום דרבו עליון f_n כך ש $R(f_n)-R\left(f1_{(\frac{1}{n},1]}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן $R(f_n)\to I$. מכיוון ש $f_n\ge f1_{(\frac{1}{n},1]}$ עפ"י DCT נובע כי

$$\lim_{a\to0^+}R\left(f1_{(a,1]}\right)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f1_{(\frac{1}{n},1]}dm=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f1_{(\frac{1}{n},1]}dm=\int_0^1 f\,dm.$$