תרגיל 10

להגשה עד 1.2.17

יהי $(X, \mathbb{A}, \mu)$ ממ"ח.
נסמן: $L^p(\mu) = L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$ ו: $l^p = l^p(\mathbb{N})$.

שאלה 1

תהי $f\colon X \to \mathbb{R}$ מדידה-$\mathbb{A}$, $E_f := \{p \in (0,\infty) \mid \|f\|_p < \infty\}$.

1. אם $r < s$ שניהם ב־ E_f אז הקטע (r,s) מוכל ב־E_f (ז"א E_f **קמורה** ב־$\mathbb{R}$).
2. אם $0 < r < p < s < \infty$ אז קיים $t \in (0,1)$ יחיד כך ש־ $p = tr + (1-t)s$. עבור t זה:

$$\|f\|_p \le \|f\|_r^{t(\frac{r}{p})} \cdot \|f\|_s^{(1-t)(\frac{s}{p})} \le \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$$

בפרט: $L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

שאלה 2

תהי $K : X \times X \to \mathbb{R}$ מדידה ביחס למרחב מידת המכפלה. נניח כי קיים $M < \infty$ כך ש:

$$\forall x : \int |K(x,y)| d\mu(x) < M \quad ; \forall y : \int |K(x,y)| d\mu(y) < M$$

עבור f מדידה, נגדיר: $T(f(x)) := \int K(x,y) f(y) d\mu(y)$. הוכיחו כי:

1. $\|T(f)\|_{L^1} \le M\|f\|_{L^1}$.
2. עבור $p \in (1,\infty)$ מתקיים: $\|T(f)\|_{L^p} \le M\|f\|_{L^p}$.

שאלה 3

יהי $p \in [1,\infty)$, ותהי $f \in L^p(\mu)$. הוכיחו כי המידה של הקבוצה: $[f \neq 0] = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ הינה σ־ סופית (כלומר, ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מדידות ובעלות מידה סופית).

שאלה 4

1. יהי $1 \le p \le \infty$. הוכיחו כי $l^p \subseteq l^\infty$.
2. הראו כי המרחב $(l^1, \|\cdot\|_\infty)$ אינו שלם.

שאלה 5

נתבונן במרחב הילברט $L^2([-1,1])$.

1. תארו את המרחב האורתוגונלי לוקטור $f(x) = c$ (פונקציה קבועה על $[-1,1]$).
2. מצאו בסיס אורתונורמלי לתת המרחב הנפרש ע"י הוקטורים $\{1, x, x^2\}$.

שאלה 6

נגדיר: $F := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$. הוכיחו או הפריכו:

1. F תת מרחב לינארי של l^2.
2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה בl^2.

בהנאה :)