תרגיל 9

1. נניח ו f הינה פונקציה רציפה על $[0,1]$ ו f רציפה בהחלט על $(a,1]$ לכל $a\in(0,1)$. האם f בהכרח רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם בנוסף f הינה בעלת השתנות חסומה ב $[0,1]$ האם אז f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם לא, תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ניקח לדוגמא את הפונקציה בשאלה הראשונה. מכיוון ש f תהיה אז גזירה ברציפות בקטע $(a,1]$ לכל $a\in(0,1)$ אזי היא רציפה ליפשיץ ולכן רציפה בהחלט. אבל מכיוון שאיננה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ אז נובע כי איננה רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$. לעומת זאת, אם בנוסף f בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ נובע כי f גזירה בקטע $[0,1]$ ולכן $\int_0^x f'\le f(x)-f(0)$. אבל f רציפה בהחלט על $(a,1]$ ולכן $\int_0^x f'=\int_0^a f'+\int_a^x f'=\int_0^a f'+f(x)-f(a)$. נשאיף את a ל 0 ומכיוון ש f רציפה ומתכונות האינטגרל נובע כי $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^a f'+f(x)-f(a)=f(x)-f(0)$. ולכן בסה"כ נקבל כי $\int_0^x f'=f(x)-f(0)$, כלומר f רציפה בהחלט.

2. נניח ו f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$ ולכל $A\subseteq[0,1]$ נגדיר $f(A)=\{f(x):x\in A\}$. הראו כי אם A הינה בעלת מידת לבג 0 אזי $f(A)$ בעלת מידת לבג 0.

פתרון: מכיוון ש f רציפה בהחלט נובע כי היא בעלת השתנות חסומה ולכן ניתן לפרק אותה להפרש של שתי פונקציות עולות. מכיוון ש f רציפה בהחלט, ניתן להראות כי $f = f_1 - f_2$ כאשר f_1, f_2 רציפות בהחלט ועולות. מכיוון ש $m(A)=0$ נובע כי נוכל למצוא קבוצה פתוחה $A \subseteq O$ כך ש $m(O) < \varepsilon$. נוכל לרשום $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר $\{I_n\}$ קטעים זרים. מכיוון ש f_1 הינה פונקציה עולה נובע כי $\{f_1(I_n)\}$ הינם קטעים(אולי טריויאלים) זרים (אולי פרט לנקודון) וכי

$$m(f_1(A)) = m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right) \Leftarrow f_1(A) \subseteq \bigcup_i f_1(I_i)$$

מכיוון ש f_1 עולה ורציפה ברור כי המידה של תמונה של קטע (x_1, x_2) תהיה $f(x_2) - f(x_1)$ נסמן $I_n = (a_n, b_n)$, f_1 רציפה בהחלט ולכן קיימת הנגזרת f_1' וכן $\int_{a_i}^{b_i} f_1' dm = f_1(b_i) - f_1(a_i)$.

$$m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(f(I_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} f_1(b_i) - f_1(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f_1' dm$$

$$= \int_O f_1' dm$$

כאשר השיוון האחרון נובע מכך ש $f' \geq 0$ כב"מ. מכאן ש

$$m(O) \to 0 \Rightarrow \int_O f_1' dm \to 0 \quad .3$$

ומכאן ש $m(f_1(O)) \to 0$. באותו אופן נראה כי $m(f_2(O)) \to 0$. נסמן ב $f_1(I_i) = (a_i^1, b_i^1),\ f_2(I_i) = (a_i^2, b_i^2)$ ונשים לב כי

$$f((a_i, b_i)) \subseteq (b_i^1 - a_i^2, a_i^1 - b_i^2)$$

$$\Rightarrow m(f((a_i, b_i))) \leq b_i^1 - a_i^2 - (a_i^1 - b_i^2) = m(f_1((a_i, b_i))) + m(f_2((a_i, b_i)))$$

$$\Rightarrow m(f(A)) \leq m(f(O)) \leq m(f_1(O)) + m(f_2(O)) \xrightarrow[m(O)\to 0]{} 0$$

מכאן ש $m(f(A) = 0)$. מש"ל.