

תורת המספרים האלגברית (88798) תשפ"א

תרגיל 9

1. יהי K שדה שלם תחת הערכה לא-ארכימדית ותהי L/K הרחבה אלגברית. הוכח כי L שלם אם ורק אם $[L : K] < \infty$.
2. הוכח את הטענה הבאה, שנקראת הלמה של קרסנר. יהי K שדה הנזלי ויהי \bar{K} סגור אלגברי. יהי $\alpha = \alpha_1 \in \bar{K}$ ספרבילי מעל K ויהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ הצמודים של α . יהי $\beta \in \bar{K}$ ונניח כי $|\alpha - \beta| < |\alpha - \alpha_i|$ לכל $2 \leq i \leq r$. אזי $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$.
 רמז: נניח שלא. אזי קיים שיכון $\sigma : K(\alpha, \beta) \hookrightarrow \bar{K}$ כך ש- $\sigma(\beta) = \beta$ אך $\sigma(\alpha) \neq \alpha$. דרך אגב, אפשר להוכיח ששדה K הינו הנזלי אם ורק אם הלמה של קרסנר נכונה עבורו.
3. יהי K שדה הנזלי, ויהי \mathcal{O} חוג ההערכה שלו. יהי $f(x) \in \mathcal{O}[x]$ פונינוס מתוקן אי-פריק וספרבילי. יהי $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$. הוכח שקיים $\varepsilon > 0$ כך שאם $g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k \in K[x]$ כך ש- $|a_k - b_k| < \varepsilon$ לכל k , אזי $g(x)$ גם אי-פריק וספרבילי ומתקיים $K[x]/(f) = K[x]/(g)$.
 רמז: היעזר בלמה של קרסנר, שים לב שאם β הינו שורש של g , אזי $|f(\beta) - g(\beta)| = |f(\beta)|$.
4. (א) הוכח כי \mathbb{Q}_p בן מניה.
 (ב) הוכח שהסגור האלגברי $\bar{\mathbb{Q}}_p$ בן מניה.
 (ג) יהי $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ מספור של האיברים של $\bar{\mathbb{Q}}_p$. תהי $\mathbb{C}_p = \widehat{\bar{\mathbb{Q}}_p}$ ההשלמה של $\bar{\mathbb{Q}}_p$. תהי $\{\varepsilon_n\}$ סדרה יורדת ממש של מספרים ממשיים כך ש- $\frac{1}{2} < \varepsilon_n < 1$ לכל n . לכל $a, b \in \mathbb{C}_p$ נגדיר $a \sim_1 b$ אם ורק אם $|a - b| \leq \varepsilon_1$. הוכח שזה יחס שקילות ושקיימת מחלקת שקילות B_1 כך ש- $\alpha_1 \notin B_1$.
 (ד) לזוג איברים $a, b \in B_1$ נגדיר $a \sim_2 b$ אם ורק אם $|a - b| \leq \varepsilon_2$. הוכח שזה יחס שקילות ושקיימת מחלקת שקילות B_2 כך ש- $\alpha_2 \notin B_2$.
 (ה) נמשיך כך: בהינתן כדור סגור B_{n-1} בעל רדיוס ε_{n-1} , הוכח שקיים כדור סגור $B_n \subset B_{n-1}$ בעל רדיוס ε_n כך ש- $\alpha_n \notin B_n$.
 (ו) נניח שקיים $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. הוכח כי $B_n = \{a \in \mathbb{C}_p : |a - b| \leq \varepsilon_n\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
 (ז) הוכח כי $\alpha_n \notin \{a \in \mathbb{C}_p : |a - b| < \frac{1}{2}\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
 (ח) הוכח כי $\bar{\mathbb{Q}}_p$ צפוף ב- \mathbb{C}_p , בסתירה לסעיף הקודם. הסק $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. כלומר הלמה של קנטור לא נכונה עבור \mathbb{C}_p .
5. יהי K שדה שלם עם הערכה בדידה. הוכח שהלמה של קנטור נכונה: בהינתן שרשרת $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \dots$ של כדורים סגורים מקוונים ב- K , אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.
6. הוכח כי סגור אלגברית. רמז: למה של קרסנר.
7. הוכח כי $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ מכיל שורש של $x^{p-1} + p$.