

# משפטי היררכיה

## הגדרה 1

תהי פונקציה  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . המחלקה  $DTIME(t)$  מכילה את השפות שניתן להכריעה בסיבוכיות זמן  $t(n)$ .

## הגדרה 2

פונקציה  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  נקראת ניתנת לבניה בזמן אם קיים אלגוריתם שבהינתן  $n$ , מחשב את  $t(n)$  תוך  $t(n)$  צעדים.

## משפט

לכל פונקציה  $t_1$  שניתנת לבניה בזמן ולכל פונקציה  $t_2$  כך ש  $t_2(n) > t_1(n) \cdot \log^2(t_1(n))$  וגם  $t_1(n) > n$  מתקיים:

$$DTIME(t_1) \subsetneq DTIME(t_2)$$

## מודל

לצורך ההוכחה נסתכל על מכונות טיורינג עם 2 סרטים.

**הערה:** אפשר להוכיח משפט דומה לכל מודל חישובי סביר, אבל חייבים להחליט על המודל מראש.

## הוכחה

נראה שקיימת שפה  $L$  כך ש:

1.  $L \notin DTIME(t_1)$

2.  $L \in DTIME(t_2)$

**הרעיון:** לכל מ"ט  $M$  שרצה  $t_1$  צעדים, קיים קלט  $x_M$  עליו  $M$  נכשלת - כלומר מחזירה תשובה שגויה.

**נשים:** בד"כ מגדירים מכונה לפי שפה - אבל פה אנו מגדירים מכונה לפי שפה.

פורמלית, נגדיר פונקציית מיפוי  $\mu$  שממפה מחרוזות בינאריות למכונות טיורינג. הדרישה היא ש  $\mu$  היא על - כלומר לכל מ"ט קיימת מחרוזת שממופה אליה. השפה  $L$  מוגדרת באופן הבא: בהינתן קלט  $x$ :

1. חשב את  $t = t_1(|x|)$ .

2. תהי  $M$  מ"ט המתאימה ל-  $x$  כלומר  $M = \mu(x)$ .

3. הרץ את  $M(x)$  תוך  $t$  צעדים לכל היותר.

(א) אם  $M(x)$  עצרה תוך  $t$  צעדים והחזירה 1,  $x \notin L$ .

(ב) אם  $M(x)$  עצרה תוך  $t$  צעדים והחזירה 0,  $x \in L$ .

(ג) אם  $M$  לא עצרה תוך  $t$  צעדים<sup>1</sup>, נקבע שרירותית ש  $x \notin L$ .

נראה ש  $L \notin DTIME(t_1)$ . נראה שכל מ"ט בעלת סיבוכיות זמן  $t_1$  לא מכריעה את  $L$ .

תהי  $M$  מ"ט בעלת סיבוכיות זמן  $t_1$ , נראה שקיים קלט עבורו  $M$  נכשלת. נתבונן ב  $x_M$  כך ש  $M\mu(x_M) = M$  (הוא על). יש שתי אפשרויות:

א.  $x_M \in L \iff M$  עצרה תוך  $t$  צעדים והחזירה 0  $\iff M$  טועה על  $x_M$ .

ב.  $x_M \notin L \iff M(x_M) \iff M$  עצרה תוך  $t$  צעדים והחזירה 1  $\iff M$  טועה על  $x_M$ .

נראה ש  $L \in DTIME(t_2)$ , נראה שקיימת מ"ט עם 2 סרטים המכריעה את  $L$  בסיבוכיות זמן  $t_2$ .

**טענת עזר:** תהי  $M$  מ"ט בעלת  $k$  סרטים העובדת בסיבוכיות זמן  $t$ . קיימת מ"ט  $M'$  בעלת שני סרטים המסמלצת את אופן פעולת  $M$  תוך  $O(t \log t)$  צעדים.

**הוכחה:** כל צעד של המכונה  $M$  ניתן לסמלץ בזמן  $|M|$  - כי צריך לעבור על  $M$ , לראות את הפקודה הבאה, ולבצע אותה.

$$\text{סה"כ} - |M| \cdot |x| \cdot t_1.$$

נגדיר פונקציה  $\mu$  שעובדת באופן הבא: אם  $x = \langle M \rangle 1 \underbrace{0 \dots 0}_{2^{|M|}}$  אזי החזר את  $M$ , אחרת החזר מ"ט שרירותית.

$$|M| = \log |x| < \log t_1(|x|)$$

■

<sup>1</sup>המקרה הזה לא באמת מעניין אותנו, כי זה אומר שסיבוכיות הזמן של  $M$  היא יותר מ  $t_1$  כלומר בכל אופן  $L_M \notin DTIME(t_1)$