תרגול 4

5 בנובמבר 2013

מטריצות אלמנטריות

ראינו בתרגול 2 שלוש סוגי פעולות אלמנטריות. לכל פעולה אלמנטרית נתאים מטריצה הנקראת מטריצה אלמנטרית.

ע"י הפעלת הפעולה על מטריצת היחידה $\rho \rightleftarrows \rho(I)$.

דוגמאות (ב $\mathbb{F}^{3\times 3}$)

החלפת שורות $R_2 \leftrightarrow R_3$ מתאים למטירצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

הכפלת שורה 1 ב־5 $5 \cdot R_1 \to R_1$ מתאים למטריצה $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

החסרת שורה 3 משורה 1 $R_1 - R_3 \to R_1$ מתאים למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

הערה:

1. משפט: הפעלת פעולה שורה ρ על מטריצה A זהה להכפלת המטריצה המתאימה מימין $\rho(I)A$.

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ אזי $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מחליף את שורות A.

הפיכות

תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אם קיימת $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$כך ש $AB = BA = I_n$אזי A תקרא הפיכה ו Bתקרא ההופכית שלה ותוסמן ב $B = A^{-1}$.

הערה: משפט: אם $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $BA = I_n$ אז A וגם B מטריצות הפיכות. (לא צריך את שני השיוויונות $AB = BA = I_n$).

טענה: תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. הוכח $AB = 0 \Rightarrow B = 0$.

פתרון: $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow B = 0$ ■

הערה: אם A אינה הפיכה אז הטענה לא נכונה דוגמא

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

במקרה כזה ש $AB=0$ ו A,B שונים מאפס אזי A תקרא מחלקת אפס שמאלי ו B מחלק אפס ימיני

תרגיל: תהא A הפיכה אזי לכל מטריצה B מתקיים כי $Bx=0 \Leftrightarrow ABx=0$ (הפתרונות של $Bx=0$ זההים לפתרונות של $ABx=0$)

הוכחה: יהא x כך ש $ABx=0$ אזי נכפול ב A^{-1} ונקבל כי $Bx=0$ מצד שני אם $Bx=0$ אז אם נכפיל ב A נקבל $ABx=A0=0$

תרגיל: A הפיכה $\Leftrightarrow A^k$: $\exists k\in\mathbb{N}$ הפיכה.

פתרון: $(\Rightarrow)$ נתון A^k הפיכה $\Leftarrow A^kB=I \Leftarrow AA^{k-1}B=I \Leftarrow AC=I$ כאשר $C=A^{k-1}B$ כלומר A הפיכה.

$(\Leftarrow)$נתון ש־A הפיכה. נבחר $k=1$ וסיימנו. ∎

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה עם שורת אפסים. הוכח: A לא הפיכה.

פתרון: תהא שורה i שורת האפסים. אזי $R_i(AB)=R_i(A)B=\vec{0}B=\vec{0}$ לכל B בפרט לא קיימת B כך ש$AB=I$.

משפט: מטריצה אלמנטרית $\rho(I)=E$ היא הפיכה ומתקיים $E^{-1}=\rho^{-1}(I)$. (היא מתקבלת מהפעלת הפעולה ההופכה על מטריצת היחידה)

תרגיל: מצא את ההופכית של המטריצות מתחילת השיעור:

פתרון :
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

הערה: עבור מטריצה P־המחליפה שורות $R_i\leftrightarrow R_j$ מתקיים $P^2=I$ כלומר $P^{-1}=P$.

תרגיל: יהיו A,B הפיכות הוכח :

1. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

   פתרון: נבדוק ישירות

   $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$.

   (א) הכללה: אם $A_1\ldots A_k$ הפיכות אזי $(A_1\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_1^{-1}$

2. לכל n טבעי מתקיים $(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$ (ולכן ניתן להגדיר A^{-n} להיות אחד מהביטויים)

   הוכחה: באינדוקציה: עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור $n-1$ ונוכיח עבור n

$$\begin{aligned}(AA\cdots A)(A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}) &= A^{n-1}AA^{-1}(A^{-1})^{n-1}\\ &= A^{n-1}(A^{-1})^{n-1} \underset{\text{Induction assumption}}{=} A^{n-1}(A^{n-1})^{-1}=I\end{aligned}$$

הערה: לא ניתן לדעת שום דבר על הביטוי $(A+B)^{-1}$.

ייתכן $A=I,B=-I$ הפיכות ו $A+B=0$ לא הפיכה.

יתכן $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ לא הפיכות ו $A+B=I_2$ הפיכה.

3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

פתרון $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$.

מסקנה אם Aהפיכה וסימטרית אזי A^{-1} גם כן סימטרית.

הוכחה: $A^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \Leftarrow A^{-1}$ סימטרית ■

דוגמא נוספת: מבדיקה ישירה רואים ש $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

למשל מטריצת סיבוב בזוית θ במישור $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$

ההופכית שלה היא $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(-\theta) \\ sin(-\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{cos^2(\theta)+sin^2(\theta)}\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$

סיבוב ב $(-\theta)$

אלגוריתם להפוך מטריצות

תרגיל:חשב עבור את ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$:

כך עושים זאת:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ואז $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

הסבר פורמאלי

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ Aל- I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר $E_n \cdots E_1 A = I$ (E_i)אלמנטריות.

$A^{-1} = E_n \cdots E_1 = E_n \cdots E_1 I \Leftarrow$ לכן אם נתבונן ב- $(A|I)$ נפעיל פעולות אלמנטריות $E_n \cdots E_1$ על המטריצה המורחבת נקבל בסוף $(I|A^{-1})$.

הערות:

1. בהנתן מטריצה הפיכה A אזי למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד והוא $x = A^{-1}b$

לדוגמא: הפתרון למערכת $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

הינו $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. אם אחרי הדירוג של A לא שווה ל I אזי A אינה הפיכה.
הוכחה: נסמן ב E את מכפלת המטריצות האלמנטריות שמדרגות את A. ברור כי E הפיכה כמכפלה של מטריצות הפיכות. אם A הפיכה אזי גם EA הפיכה. אבל ב EA יש שורת אפסים כי $EA \neq I$ סתירה לתרגיל מתחילת התרגול .

תרגיל:
תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ מצא מטריצה B כך ש $BA = I_2$

פתרון: נשלים את A למטריצה ריבועית מהתרגיל הקודם $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$.

מצאנו כי $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ולכן $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

חשבו האם קיימת C כך ש $AC = I_3$? (רמז: אם היית קיימת אז מה היה קורה אם היינו מכפילים ב B מהתרגיל?)

פירוק מטריצה הפיכה למטריצות אלמנטריות

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ Aל־ I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר $E_n \cdots E_1 A = I$ (E_i)אלמנטריות.
$\Leftarrow E_n \cdots E_1 = A^{-1}$, $A = E_1^{-1} \cdots E_n^{-1} I = E_n^{-1} \cdots E_1^{-1}$.

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$. שהפכנו כבר־ פרק את A ו A^{-1} למטריצות אלמנטריות.

פתרון: ראינו שמתקיים
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} (\ *\ ) \xrightarrow{R_3 - iR_2 \to R_3}$$
$$(\ *\ ) \xrightarrow{-\frac{1}{2}iR_1 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

את הפעולות האלמנטריות נייצג במטריצה האלמנטרית המתאימה
$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כיוון ש $E_3 E_2 E_1 A = I$ נסיק כי

$\Leftarrow \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1},\ A^{-1} = E_3E_2E_1$.

פולינומים

דוגמא: $1+x, x^2, 2$ הם פולנומים

פורמאלית פולינום הוא ביטוי מהצורה $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$

כאשר $a_i \in \mathbb{F}$

n נקרא דרגת הפולינום $deg(p(x)) = n$

אוסף כל הפולינומים מסומן ב $\mathbb{F}[x]$

הגדרה: תהא A מטריצה ריבועית ו $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ פולינום. אזי הצבה A בפולינום $p(x)$ היא המטריצה

$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots a_1 A + a_0 I$

למשל $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $p(x) = x^2 - 1$ אז $p(A) = A^2 - I_2 = 0_2$

תרגיל: תהא Aמטריצה ריבועית $p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ פולינום ללא מקדם חופשי .

הוכח כי אם $p(A) = 0$ אז A אינה הפיכה.

פתרון: נניח בשלילה כי A הפיכה. נתון כי $\sum_{k=1}^{n} a_k A^k = 0$ אזי $A(\sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}) = 0$ כיוון ש $(\sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1})$ מטריצה הפיכה (למה?)

נקבל כי $p(A) = 0$ הפיכה. סתירה.