אינפי 4 - תרגיל 1

תאריך הגשה: 27-28 מרץ 2017

התרגיל מחולק לשני חלקים: חלק הבודק שאתם מבינים הגדרות בסיסיות בחומר וחלק שעוזר לכם להעמיק את ההבנה שלכם. נסו לפתור את התרגילים אך אל תכנסו למרה שחורה אם אינכם מצליחים.

1.1 להבנה

תזכורת: עד עתה לרוב עבדנו עם הקואורדינטות הקרטזיות (x,y) . בדומה, הגדרנו באינפי 3 את הקואורדינטות הפולאריות (r,θ) המציינות את המרחק מהראשית ואת הזווית ביחס לציר ה-x בהתאמה.

1. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פו' גזירה ברציפות המקיימת את המשוואה

$$\left|f\left(\theta\right)\right|^{2}+\left|f'\left(\theta\right)\right|^{2}\neq0,\quad\theta\in\left[a,b\right]$$

   (א) הראו כי הגרף של $r=f\left(\theta\right)$ הוא עקומה חלקה ב-$\mathbb{R}^{2}$.

   (ב) הוכיחו את הנוסחה לחישוב אורך העקומה בקואורדינטות פולאריות.

2. עקומת הנפרואיד[1] נתונה בקואורדינטות קרטזיות ע"י

$$\gamma\left(t\right)=\left(3a\cos t-a\cos3t,3a\sin t-a\sin3t\right)$$

   היכן ש$t\in\left[0,2\pi\right]$.

   (א) למחשבה (אך ממש לא להגשה): תנסו להצדיק לעצמכם את המשוואה הפולארית של הנפרואיד:$r^{2}=\frac{1}{2}a^{2}\left(5-3\cos2\phi\right)$ היכן ש $\tan\theta=\frac{3\sin\phi-\sin3\phi}{3\cos\phi-\cos3\phi}$.

   (ב) חשבו את אורך העקומה בקואורדינטות הנוחות לכם.

3. יהיו α,β עקומות שקולות.

   (א) הראו כי שקילות מסילות היא יחס שקילות.

   (ב) הראו שאם α חלקה אז גם β חלקה.

[1] הלכה למעשה מדובר במקרה פרטי של משפחת עקומות מעניינת בשם אפיציקלואידים בו בחרנו את מספר החודים להיות 2, פרט שבו אתם יכולים להעזר. הדמיון בין נפרולוג ונפרואיד איננו סמנטי גרידא. שרטטו והווכחו.

2.1 להעמקה

1. תהי $\gamma:[a,b]\to[0,1]^2$ עקומה כך ש$(\mathbb{Q}\cap[0,1])^2\subseteq\gamma([a,b])$. הראו כי בהכרח איננה חלקה.[2] שימו לב שהטענה נכונה גם עבור מימד גבוה יותר.

2. הוכח/הפרך: לעקומה חלקה $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ אין אורך (כלומר $\int_{\mathbb{R}}\|\gamma'(t)\|dt<\infty$).

3. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ עולה וגזירה ברציפות. נתבונן במשולש ישר הזווית שקודקודיו בנקודות $(0,f(0)),(1,f(1)),(1,f(0))$.אם c הוא אורך היתר וa,b אורכי הניצבים הראו כי $c\le L(f)\le a+b$.

הדרכה

כזכור אומרים כי פונקציה היא קמורה אם הישר המחבר בין כל שתי נקודות בגרף נמצא מעל לגרף הפונקציה.

(א) וודאו כי הפונקציה $g(x)=\sqrt{1+x^2}$ היא קמורה בתחום זה.

(ב) הוכיחו את אי"ש Jensen האומר כי במרחב הסתברות לכל משתנה מקרי (בפרט רציף) X ולפונקציה קמורה g,

$$E[g(X)]\ge g(E[X]).$$

תוכלו לעשות זאת בעזרת העברת ישר משיק לg בנקודה $(E(X),g(E[X]))$.

(ג) הסיקו את הדרוש מהאי"ש הנ"ל כאשר תיקחו $X\sim U[0,1]$.

[2] רמז: חלקו את הריבוע לתתי-ריבועים שצלען $\frac{1}{n}$ והסיקו מכך כי העקומה חסרת אורך.