

אינפי 4 - תרגיל 1

תאריך הגשה: 27-28 מרץ 2017

התרגיל מחולק לשני חלקים: חלק הבודק שאתם מבינים הגדרות בסיסיות בחומר וחלק שעוזר לכם להעמיק את ההבנה שלכם. נסו לפתור את התרגילים אך אל תכנסו למרה שחורה אם אינכם מצליחים.

1.1 להבנה

תזכורת: עד עתה לרוב עבדנו עם הקואורדינטות הקרטזיות (x, y) . בדומה, הגדרנו באינפי 3 את הקואורדינטות הפולאריות (r, θ) המציינות את המרחק מהראשית ואת הזווית ביחס לציר ה- x בהתאמה.

1. תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת את המשוואה

$$|f(\theta)|^2 + |f'(\theta)|^2 \neq 0, \quad \theta \in [a, b]$$

(א) הראו כי הגרף של $r = f(\theta)$ הוא עקומה חלקה ב- \mathbb{R}^2 .

(ב) הוכיחו את הנוסחה לחישוב אורך העקומה בקואורדינטות פולאריות.

2. עקומת הנפרואיד¹ נתונה בקואורדינטות קרטזיות ע"י

$$\gamma(t) = (3a \cos t - a \cos 3t, 3a \sin t - a \sin 3t)$$

היכן ש $t \in [0, 2\pi]$.

(א) למחשבה (אך ממש לא להגשה): תנסו להצדיק לעצמכם את המשוואה הפולארית

$$\tan \theta = \frac{3 \sin \phi - \sin 3\phi}{3 \cos \phi - \cos 3\phi} \quad \text{של הנפרואיד: } r^2 = \frac{1}{2} a^2 (5 - 3 \cos 2\phi)$$

(ב) חשבו את אורך העקומה בקואורדינטות הנוחות לכם.

3. יהיו α, β עקומות שקולות.

(א) הראו כי שקילות מסילות היא יחס שקילות.

(ב) הראו שאם α חלקה אז גם β חלקה.

4. תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ עולה וגזירה ברציפות. נתבונן במשולש ישר הזווית שקודקדיו

בנקודות $(0, f(0)), (1, f(1)), (1, f(0))$. אם c הוא אורך היתר ו a, b אורכי הניצבים

$$\text{הראו כי } c \leq L(f) \leq a + b$$

¹הלכה למעשה מדובר במקרה פרטי של משפחת עקומות מעניינת בשם אפיציקלואידים בו בחרנו את מספר החודים להיות 2, פרט שבו אתם יכולים להעזר. הדמיון בין נפרולוג ונפרואיד איננו סמנטי גרידא. שרטטו והוכחו.

2.1 להעמקה

1. תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow [0, 1]^2$ עקומה כך ש $\gamma([a, b]) \subseteq (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$. הראו כי בהכרח איננה חלקה.² שימו לב שהטענה נכונה גם עבור מימד גבוה יותר.
2. הוכח/הפרד: לעקומה חלקה $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ אין אורך (כלומר $\int_{\mathbb{R}} \|\gamma'(t)\| dt < \infty$).

²רמז: חלקו את הריבוע לתת-ריבועים שצלען $\frac{1}{n}$ והסיקו מכך כי העקומה חסרת אורך.