

תרגיל 6 בוגרים/תרגיל 7 תיכוניסטים.

1 כלל שרשרת ונגזרת כיוונית.

תרגיל 1. (ממבחן). תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. הראו, שאם $g_y(x) = f(x, y)$ רציפה ב x לכל y , ונניח, שקיים $M > 0$ כך שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f'_y(x, y)| < M$. הראו, ש f רציפה ב \mathbb{R}^2 .

תרגיל 2. נגדיר $g(x, y) = (x, x^2 - y)$. נשים לב, שהפונקציה הפיכה ולכן ניתן לתאר כל נקודה ב \mathbb{R}^2 בעזרת קואורדינטות

$$\begin{aligned}u &= x \\v &= x^2 + y\end{aligned}$$

נשים לב, שלמשה $u = x$ וכל נקודה (x, y) ניתן לבטא באופן יחיד על ידי הקואורדינטות

$$(x(x, v), y(x, v)) = (x(u, v), y(u, v))$$

נכון או לא נכון? הסבירו.

$$1. \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

$$2. \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

תרגיל 3. תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, ונניח ש

$$\frac{\partial f}{\partial u}(10, 4) = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(10, 4) = 2$$

נגדיר:

$$u(x, y) = x^2 + y^3$$

$$v(x, y) = x + y$$

נגדיר $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$. חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(3, 1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(3, 1)$.

תרגיל 4. תהי

$$f(x, y, z) = (\sin(x^2) + \sin(y^2) + z^2, e^z(x^3 + y^3))$$

ונניח שקיימת $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך $g(3, 2) = (\pi^2, \pi^2, 0)$ דיפרנציאבילית ב $(3, 2)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(3, 2) \frac{\partial g}{\partial v}(3, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נגדיר, $h = f \circ g$. מצאו את $\frac{\partial h_2}{\partial u}(3, 2)$ ואת $\nabla h_1(3, 2)$.

תרגיל 5. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר ש $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים $0 < M$ כך שלכל $x, y \in E$ מתקיים $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כך שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיימות בכל נקודה ו $E \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי אם הנגזרות החלקיות של f חסומות ב E , אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ.

2. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות (ז"א הנגזרות החלקיות רציפות), אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ ב E .

3. (ממבחן). אם $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, אזי f מקיימת את תנאי ליפשיץ בכדור היחידה הסגור $B(0, 1)$.

תרגיל 6. הוכיחו/הפריכו: אם $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית, ולכל $v \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a) \geq 0$ אזי $df_a = 0$ (כלומר, דיפרנציאל הוא העתקת האפס).

תרגיל 7. תהי $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב a , ו $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ב $f(a)$. הראו שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial v}(a) = dg_{f(a)} \left(\frac{\partial f}{\partial v}(a) \right)$$

תרגיל 8. (ממבחן). תהי $f(x, y) = xe^y - ye^x$. לכל אחת מהנקודות הבאות, מצאו כיוון אחד בו הנגזרת חיובית, כיוון אחד בו הנגזרת שלילית וכיוון אחד שבו הנגזרת מתאפסת, או הוכיחו שלא קיים כזה.

1. ראשית הצירים $(0, 0)$.
2. הנקודה $(1, 0)$.
3. הנקודה $(0, -1)$.