פתרונות תרגיל הבוחן, שאלות 1־3.

4. יש 4 צלעות בכיוון ציר x, 4 צלעות בכיוון ציר y ו־ 4 צלעות בכיוון ציר z, סכומם הוא a. ולכן יש לנו אילוץ $4x+4y+4z=a$ או $g(x,y,z)=4x+4y+4z-a=0$

שטח הפנים הוא $f(x,y,z)=2xy+2xz+2yz$. יש לנו מערכת של כופלי לגראנז'.

אנחנו מסתכלים רק על התחום $0\le x,y,z$ (אורכי הצלעות לא שליליים) גם נניח ש־ $0<a$ אחרת אין הגיון בשאלה.

נחפש קודם פתרונות בפנים התחום $0<x,y,z$. נשתמש הקופלי לגראנז' כרגיל.

$\nabla g(x,y,z)=(4,4,4)\neq(0,0,0)$ ולכן נחפש רק נקודות בהן $\nabla\phi(x,y,z,\lambda)=(0,0,0,0)$ כאשר $\phi(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=2xy+2xz+2yz+4\lambda x+4\lambda y+4\lambda z-a\lambda$.

נניח ש־ $\nabla\phi(x,y,z,\lambda)=(2y+2z+4\lambda,2x+2z+4\lambda,2x+2y+4\lambda,g(x,y,z))=(0,0,0,0)$

בפרט $(2y+2z+4\lambda)-(2x+2z+4\lambda)=0-0=0$ ולכן $x=y$. בדומה $(2y+2z+4\lambda)-(2x+2y+4\lambda)=0-0=0$ ולכן $x=z$.

יוצא $x=y=z$ וביחד עם $g(x,y,z)=4x+4y+4z-a=0$ נקבל $x=y=z=\frac{a}{12}$ ושם $f(x,y,z)=2xy+2xz+2yz=\frac{a^2}{24}$.

נעבור לשפה של התחום. היא מורכבת משלוש חלקים חלקים $x\ge 0,y\ge 0,z=0$, $x\ge 0,y=0,z\ge 0$ ו־ $x=0,y\ge 0,z\ge 0$.

f ו־ g סימטריים ביחס לשינוי סדר המשתנים ($f(x,y,z)=f(z,y,x)$ וכדומה) ולכן הפונקציה תחזיר אותו מקסימום מקומי בכל אחד מהחלקים הללו.

ולכן נבדוק את ערך הפונקציה רק בתחום אחד ־ $x\ge 0,y\ge 0,z=0$. שם $g(x,y,z)=g(x,y,0)=4x+4y-a=0$ ו־ $f(x,y,z)=f(x,y,0)=2xy$.

שוב נחפש קודם פתרונות בפנים של השפה $0<x,y$ ונשתמש הקופלי לגראנז' כרגיל.

$\nabla g(x,y,0)=(4,4)\neq(0,0)$ ולכן נחפש רק נקודות בהן $\nabla\phi(x,y,\lambda)=(0,0,0)$ כאשר $\phi(x,y,\lambda)=f(x,y,0)+\lambda g(x,y,0)=2xy+4\lambda x+4\lambda y-a\lambda$.

נניח ש־ $\nabla\phi(x,y,\lambda)=(2y+4\lambda,2x+4\lambda,g(x,y,z))=(0,0,0)$

בפרט $(2y+4\lambda)-(2x+4\lambda)=0-0=0$ ולכן $x=y$. ביחד עם $g(x,y,0)=$

$4x+4y-a=0$ נקבל $x=y=\frac{a}{8}$ ושם $f\left(x,y,z\right)=2xy=\frac{a^2}{32}$.

נעבור לשפה של השפה. כן, זה נשמע מוזר, אבל ככה זה. היא מורכבת משני חלקים חלקים $x\geq 0, y=z=0$, ו־ $x=z=0, y\geq 0$. בשניהם $f\left(x,y,z\right)=0$ תמיד ולכן אין טעם לסתכל עליהם. נקודת המקסימום של f בנקודת האקסטרימום על השפה היא $\left(\frac{a}{8},\frac{a}{8},0\right)$שבה $f\left(x,y,z\right)=\frac{a^2}{24}$. זה קטן יותר מערך f בנקודת האקסטרימום הפנימית $\left(\frac{a}{12},\frac{a}{12},\frac{a}{12}\right)$שבה $f\left(x,y,z\right) = \frac{a^2}{24}$ ולכן $\left(\frac{a}{12},\frac{a}{12},\frac{a}{12}\right)$הוא המקסימום הגלובלי.

0.5 $g\left(x,y,z\right) = ax^2+by^2-z-c = 0$הוא פרבולואיד . נתנו לכם לבחור ערכי a,b,cכרצונכם ולכן יש הרבה תשובות אפשריות. בכלליות $g\left(x,y,z\right)=ax^2+by^2-z-c=0$

הוא אילוץ והפונקציה שלנו היא פונקציה המרחק של נקודה (x,y,z)מ־ $(0,0,0)$. $d\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

נמצא את המינימום של $f\left(x,y,z\right) = \left(d\left(x,y,z\right)\right)^2 = x^2+y^2+z^2$. הוא מתקבל באותה נקודה וערך dהמינימאלי הוא השורש של ערך f המינימאלי

נקודות הקיצון מקיימות אחד משני תנאים. לא ייתכן ש־ $\nabla g\left(x,y,z\right)=(2ax,2by,1)=(0,0,0)$, ולכן נחפש רק נק' שמקיימות את התנאי השני

$\nabla\phi\left(x,y,z,\lambda\right) = (0,0,0,0)$ כאשר $\phi\left(x,y,z,\lambda\right) = f\left(x,y,z\right)+\lambda g\left(x,y,z\right) = x^2+y^2+z^2+\lambda ax^2+\lambda by^2-\lambda z-\lambda c$.

נניח ש־ $\nabla\phi\left(x,y,z,\lambda\right)=\left(2\left(1+a\lambda\right)x,2\left(1+b\lambda\right)y,2z-\lambda,g\left(x,y,z\right)\right)=(0,0,0,0)$. אזי $z=\frac{\lambda}{2}$, ויש 4 אופציות:

א. $x=y=0$ ואז $g\left(x,y,z\right)=-\frac{\lambda}{2}-c=0$ אומר ש־ $\lambda=-2c$ ו־ $z=-c$. ז"א $(x,y,z)=(0,0,-c)$ושם $f\left(x,y,z\right)=c^2$ ו־ $d\left(x,y,z\right)=|c|$.

ב. $y=0$ ו־ $1+a\lambda=0$, ז"א $\lambda=-\frac{1}{a}$ זה אומר ש־ $z=-\frac{1}{2a}$. ובנוסף $g\left(x,y,z\right)=ax^2+\frac{1}{2a}-c=0$ נותן ש־ $x=\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}}$.

ז"א $(x,y,z) = \left(\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}},0,-\frac{1}{2a}\right)$ושם $f\left(x,y,z\right) = \frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{4a^2} = \frac{c}{a}-\frac{1}{4a^2}$ ו־ $d\left(x,y,z\right)=\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{4a^2}}$.

כל זה אפשרי, כמובן, רק אם $\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}\geq 0$. אחרת $x=\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}}$ לא מוגדר.

ג. המקרה הדומה $1+b\lambda=0$ ו־ $x=0$, בו, בדומה, ז$(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{1}{2b^2}},0,-\frac{1}{2b}\right)$ושם $f(x,y,z)=\frac{c}{b}-\frac{1}{4b^2}$ ו־ $d(x,y,z)=\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{1}{4b^2}}$.

כל זה אפשרי, כמובן, רק אם $\frac{c}{b}-\frac{1}{2b^2}\geq 0$. אחרת $x=\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{1}{2b^2}}$ לא מוגדר.

ד. המקרה בו $1+a\lambda=1+b\lambda=0$. זה כמובן ייתכן רק אם $a=b$. אז שוב $\lambda=-\frac{1}{a}$ ו־ $z=-\frac{1}{2a}$. בנוסף סף $g(x,y,z)=a\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2a}-c=0$ נותן ש־ $0\leq x^2+y^2=\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}$. ישנם הרבה ערכי x ו־ y שמקיימים את זה, אבל בכולם $f(x,y,z)=\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{c}{a}-\frac{1}{4a^2}$ ו־ $d(x,y,z)=\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{4a^2}}$.

בפרט הנקודה $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}},0,-\frac{1}{2a}\right)$היא אחת מאלו שמחזירות את גודל dהזה, ולכן חזרנו למקרה ב. ההבדל היחיד הוא שהערך ה"מקסימאלי"

האפשרי הזה קורה ביותר מנקודה אחת.

עם ככה, אנחנו נשארים אם 3 ערכים פוטנציאליים: $d(x,y,z)=|c|$ ב־ $(x,y,z)=(0,0,-c)$ תמיד אפשרי. $d(x,y,z)=\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{1}{4b^2}}$ב־ $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{c}{b}-\frac{1}{2b^2}},0,-\frac{1}{2b}\right)$ אפשרי אם $\frac{c}{b}-\frac{1}{2b^2}\geq 0$. $d(x,y,z)=\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{4a^2}}$ ב־ $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}},0,-\frac{1}{2a}\right)$

אפשר אם $\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}\geq 0$ ואם גם $a=b$ הערך הנ"ל התקבל בכל הנקודות

בהן $z=-\frac{1}{2a}$ ו־ $x^2+y^2=\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}$. ולא רק בנק'2 הספציפית $(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{1}{2a^2}},0,-\frac{1}{2a}\right)$.

המרחק הוא הגודל הקטן ביותר מבין אילו האפשריים.

6. יש 4 צלעות בכיוון ציר x, 4 צלעות בכיוון ציר y ו־ 4 צלעות בכיוון ציר z, סכומם

הוא a. ולכן יש לנו אילוץ $4x+4y+4z=a$ או $g(x,y,z)=4x+4y+4z-a=0$

הנפח הוא $f(x,y,z)=xyz$. יש לנו מערכת של כופלי לגראנז'.

אנחנו מסתכלים רק על התחום $0\leq x,y,z$ (אורכי הצלעות לא שליליים) גם נניח ש־

$a>0$אחרת אין הגיון בשאלה.

בשפת התחום מורכבת משלוש חלקים חלקים $x\geq 0, y\geq 0, z=0$, $x\geq 0, y=0, z\geq$

ו־ $0 \leq z ,0 \leq y ,0 = x$. בכל השפה $0 = f\left(x,y,z\right)$ תמיד. ולכן

אין טעם לחפש פתרונות שם. אז נביט בפנים התחום $0 < x,y,z$. נשתמש הקופלי לגראנז' כרגיל.

$\nabla g\left(x,y,z\right) = \left(4,4,4\right) \neq \left(0,0,0\right)$ ולכן נחפש רק נקודות בהן $\nabla\phi\left(x,y,z,\lambda\right) =$ $\left(0,0,0,0\right)$ כאשר $\phi\left(x,y,z,\lambda\right) = f\left(x,y,z\right) + \lambda g\left(x,y,z\right) = xyz + 4\lambda x + 4\lambda y +$ $4\lambda z - a\lambda$.

נניח ש־ $\nabla\phi\left(x,y,z,\lambda\right) = \left(yz + 4\lambda, xz + 4\lambda, xy + 4\lambda, g\left(x,y,z\right)\right) = \left(0,0,0,0\right)$

בפרט $\left(yz + 4\lambda\right) - \left(xz + 4\lambda\right) = 0 - 0 = 0$ ולכן $yz = xz$. בגלל ש־ $0 < z$ ‏$x = y$.

בדומה $\left(yz + 4\lambda\right) - \left(xy + 4\lambda\right) = 0 - 0 = 0$ ולכן $yz = xy$ ובגלל ש־ ש־ $0 < y$ ‏$x = z$.

יוצא $x = y = z$ וביחד עם $g\left(x,y,z\right) = 4x+4y+4z-a = 0$ נקבל $x = y = z = \dfrac{a}{12}$

ושם $f\left(x,y,z\right) = xyz = \dfrac{a^3}{1728}$. זה המקסימום הגלובלי.