תורת המשחקים – שיעור 5

אסטרטגיות מקסמין, משפט המינימקס, משחקי סכום אפס

בחירת אסטרטגיה ממזערת נזקים

- עד כה ניסינו להעריך איזו אסטרטגיה עלינו לבחור במשחק ע"י ניתוח האסטרטגיות שלנו והאסטרטגיות של השחקנים האחרים. לעתים ניתוח זה אינו מועיל:
  - אין ביכולתנו להעריך את הרציונליות של השחקנים האחרים
  - איננו מסוגלים להעריך אילו אסטרטגיות מועדפות על ידי השחקנים האחרים (לדוגמה ע"י שיקולי שליטה)
  - גם אם יש נקודת שיווי משקל נאש היא עלולה להיות "מסוכנת" (נראה בדוגמה הבאה למה הכוונה).

דוגמה לשיווי משקל נאש "מסוכן"

שחקן 2

שחקן 1	L	R
T	2,1	2,-20
M	3,0	-10,1
B	-100,2	3,3

- נניח שהתשלומים במשחק הם באלפי ש"ח.
- במשחק הזה יש שיווי משקל נאש יחיד (B,R) אשר מביא תשלום (3,3). התוצאה די סבירה לשני השחקנים.
- אבל אם במקרה (או בכוונה) שחקן 2 יבחר ב- L ייגרם לשחקן 1 נזק כבד.

התרחיש הגרוע ביותר – worst case scenario

- במקרים כנ"ל ברצוננו להתייחס ***לתרחיש הגרוע ביותר*** שיכול לקרות בבחירת אסטרטגיה נתונה שלנו.

- דרך שנראית הגיונית לשחק היא לבחור באסטרטגיה שבה התרחיש הגרוע ביותר הוא "הכי פחות גרוע", או "הכי טוב" עבורנו.

- נמחיש זאת ע"י דוגמה:

דוגמה

שחקן 2

שחקן 1	L	C	R
T	2,0	3,3	0,2
B	1,3	0.5, 0	3,1

- לכל אסטרטגיה של שחקן 1, נמצא את התרחיש הגרוע ביותר.
- נוסיף עמודה של MIN לטבלה.

שחקן 2

שחקן 1

	L	C	R	MIN
T	2,0	3,3	0,2	
B	1,3	0.5, 0	3,1	

- אם שחקן 1 בוחר ב T אזי התרחיש הגרוע ביותר עבורו הוא בחירת R ע"י שחקן 2.
- אם שחקן 1 בוחר ב B אזי התרחיש הגרוע ביותר עבורו הוא בחירת C ע"י שחקן 2.
- אם כך עדיף על שחקן 1 לבחור באסטרטגיה B כדי "למזער נזקים".

שחקן 2

שחקן 1		L	C	R	MIN
	T	2,0	3,3	0,2	0
	B	1,3	0.5, 0	3,1	0.5
	MIN	0	0	1	

- נבצע חישוב דומה עבור שחקן 2.
- אם כך על שחקן 2 לבחור באסטרטגיה R אם ברצונו "למזער נזקים".

- קיבלנו שאם שני השחקנים משחקים אסטרטגיות "ממזערות נזקים", הם יבחרו בוקטור האסטרטגיות (B,R) שמביא
תשלום 3 לשחקן 1 לעומת תשלום 1 לשחקן 2.
- נמצא נקודות שיווי משקל נאש במשחק הנ"ל:

	L	C	R
T	2,0	3,3	0,2
B	1,3	0.5, 0	3,1

- שיווי משקל נאש היחיד הוא (T,C) אשר שונה מוקטור האסטרטגיות (B,R).
- נשים לב שאם שחקן 2 מאמין ששחקן 1 ייבחר באסטרטגיה B עדיף לו לבחור באסטרטגיה L ולא R.

אסטרטגית מקסמין

- לאסטרטגיה ממזערת נזקים (B או R בדוגמה הנ"ל) קוראים ***אסטרטגית מקסמין***, או ***אסטרטגית ביטחון***.
- אסטרטגיה x_i של שחקן i נקראת ***אסטרטגית מקסמין*** אם לכל $y_i \in S_i$ מתקיים

$$\min_{x_{-i} \in S_i} u_i(x_i, x_{-i}) \geq \min_{x_{-i} \in S_i} u_i(y_i, x_{-i})$$

- הערך $\min_{x_{-i} \in S_i} u_i(x_i, x_{-i})$ נקרא ***ערך המקסמין*** של שחקן i.
- במקרה שיש אינסוף אסטרטגיות ייתכן שלא קיים min, ולכן צריך להחליף min ב inf.
- במקרה הנ"ל עדיין ייתכן שלא קיים x_i המקיים את אי-השיוויון עבור כל שאר האסטרטגיות. כלומר *ייתכנו משחקים בהם אין אסטרטגית מקסמין*.

אסטרטגית מקסמין - המשך

- בצורה אחרת ניתן להגדיר את ***התרחיש הגרוע ביותר*** של שחקן i במקרה שבחר באסטרטגיה x_i להיות

$$\mathrm{WCS}(x_i) = \min_{x_{-i}\in S_i} u_i(x_i, x_{-i})$$

- ואז אסטרטגית מקסמין היא אסטרטגיה x_i המקיימת

$$\mathrm{WCS}(x_i) = \max_{y_i\in S_i} \mathrm{WCS}(y_i)$$

$$= \max_{y_i\in S_i} \min_{x_{-i}\in S_i} u_i(y_i, x_{-i})$$

- במקרה של אינסוף אסטרטגיות צריך להחליף max ב sup

דוגמא – ערך מקסמין במשחק רציף

- נזכר בדוגמא משיעור קודם:
  - $u_1(x,y) = 2(x + y + bxy) - x^2$
  - $u_2(x,y) = 2(x + y + bxy) - y^2$
  - $0 \leq b \leq \frac{1}{4}$
  - $x,y \in [0,4]$
- כעת נחשב את ערך המקסמין של שחקן 1:
  - $maxmin_1 = max_{x\in[0,4]}\left[min_{y\in[0,4]}\left(u_1(x,y)\right)\right]$
  - $u_1(x,y) = (2 + 2bx)y + 2x - x^2$ היא פונקציה לינארית בy
  - כיוון ש $x,b \geq 0$ זהו ישר עולה והמינימום מתקבל ב$y = 0$
  - לכן $min_{y\in[0,4]}\left(u_1(x,y)\right) = 2x - x^2$
  - לכן $max_{x\in[0,4]}[2x - x^2]$ מתקבל כאשר $x = 1$
  - לכן $maxmin_1 = 1$

אתנחתה היסטורית

- תורת המשחקים ורעיון המקסמין בפרט פותחו בשנות ה 20 של המאה ה 20 ע"י פון-נוימן (דמות מפתח בפיתוח המחשב הדיגיטלי, פצצות האטום והמימן ועוד...)
- רעיון אסטרטגית המקסמין תפס תאוצה ו"פופולריות" בתקופת המלחמה הקרה, שם רצו להתכונן לרע מכל, במחשבה שהאויב ירצה לגרום כמה שיותר נזק.
- מומחים לחשיבה אסטרטגית ותורת המשחקים ניתחו את המלחמה הקרה כדוגמה לדילמת האסיר, ולכן רצו לבטל את האפשרויות הלא סימטריות במשחק:

		ברה״מ	
		להפציץ	לא
ארה״ב	להפציץ	1,1	~~5,0~~
	לא	~~0,5~~	4,4

- ברגע שמוחקים את הצירופים הנ"ל, (לא,לא) הופך לנקודת שיווי משקל.
- יש גם חשיבות למי שמפציץ ראשון, כיוון שברגע שמדינה מופצצת כבר אין לה סיבה רציונלית להפציץ חזרה (כפי שניתחנו במשחק האולטימטום בשיעור הראשון).
- הפתרון למחיקת האסטרטגיות היה רעיון MAD של פון-נוימן: Mutual Assured Destruction.

MAD + Doomsday Device

(או מה שקורה כשנותנים למתמטיקאים לנהל את העולם)

- MAD = שני הצדדים מבטיחים מצב בו במקרה שצד אחד מפציץ הצד השני מפציץ חזרה באופן אוטומטי, וכך נמנעים צירופי האסטרטגיה הלא רצויים.
- ב 1952 הרמן קהן (מתמטיקאי שעבד עם פון-נוימן) הציע בתור בדיחה את מכונת יום-הדין (doomsday machine), שתהיה אוטומטית (ממוחשבת לגמרי ותגרום להשמדת כל החיים על כדור הארץ במקרה של התקפה סובייטית (אף אחד בפורום האסטרטגי לא צחק מהבדיחה).
- [*Dr. Strangelove or: How I learned to stop worrying and love the bomb*]

תכונות של אסטרטגיות מקסמין

- **<u>משפט:</u>** אם לשחקן יש אסטרטגיה שולטת (חלש/חזק) אזי אסטרטגיה זו היא אסטרטגית מקסמין שלו.

<u>הוכחה:</u> תהי x_i אסטרטגיה שולטת. אזי מתקיים לכל אסטרטגיה $y_i \in S_i$ ולכל צירוף אסטרטגיות $x_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i})$$

בפרט מתקיים לכל $y_i \in S_i$

$$\min_{x_{-i} \in S_i} u_i(x_i, x_{-i}) \geq \min_{x_{-i} \in S_i} u_i(y_i, x_{-i})$$

ולכן מתקיימת הגדרת מקסמין עבור x_i. *מש"ל*.

- **<u>מסקנה:</u>** וקטור המורכב מאסטרטגיות שולטות הוא שיווי משקל נאש וגם וקטור של אסטרטגיות מקסמין.
- **<u>מסקנה:</u>** אם קיים וקטור של אסטרטגיות שולטות חזק אזי יש שיווי משקל נאש **יחיד**, וקיים וקטור אסטרטגיות מקסמין **יחיד**.

שיווי משקל נאש לעומת אסט' מקסמין

- **משפט:** התשלום של שחקן בבחירת אסט' של שיווי משקל נאש תמיד גדול או שווה לתשלום בבחירת אסט' מקסמין (בתנאי כמובן שכל שאר השחקנים גם בוחרים באסטרטגית שיווי המשקל).
- **הוכחה:** נניח ש (x_i^*,x_{-i}^*) הוא שיווי משקל נאש. אזי x_i^* היא התגובה המיטבית לצירוף x_{-i}^*.
- לכן לכל $y_i \in S_i$ מתקיים $u_i(y_i,x_{-i}^*) \geq u_i(x_i^*,x_{-i}^*)$.
- בוודאי שמתקיים $u_i(y_i, x_{-i}^*) \geq \min_{x_{-i} \in S_i} u_i(y_i, x_{-i})$.
- נחבר את שני האי-שיוונות כדי לקבל $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq \min_{x_{-i} \in S_i} u_i(y_i, x_{-i})$.
- האי-שיוויון האחרון נכון לכל $y_i \in S_i$ ולכן בפרט גם לאסטרטגית המקסמין.
- מש"ל

מחיקת אסטרטגיות נשלטות ומקסמין

- **משפט:** מחיקת אסטרטגיה נשלטת של שחקן i אינה משנה את ערך המקסמין שלו.
- **הוכחה:**
- ערך המקסמין של שחקן i הוא $m_i = \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$
- לאחר מחיקת אסטרטגיה נשלטת $y_i \in S_i$ ערך המקסמין החדש הוא

$$m_i = \max_{x_i \in S_i, x_i \neq y_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$$

- כיוון ש $y_i \in S_i$ אסטרטגיה נשלטת אזי לפי הגדרה קיימת אסטרטגיה $z_i \in S_i$ המקיימת לכל $x_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(y_i, x_{-i}) \le u_i(z_i, x_{-i})$$

- לכן

$$\min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(y_i, x_{-i}) \le \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(z_i, x_{-i}) \le \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i}) = m_i$$

מחיקת אסטרטגיות נשלטות ומקסמין

- **משפט:** מחיקת אסטרטגיה נשלטת של שחקן i אינה משנה את ערך המקסמין שלו.
- **הוכחה:**
- ערך המקסמין של שחקן i הוא $m_i = \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$

התרחיש הגרוע ביותר של z_i טוב לפחות כמו זה של y_i

$$\min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(y_i, x_{-i}) \le \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(z_i, x_{-i}) \le \max_{x_i \in S_i} \min_{x_{-i} \in S_{-i}} u_i(x_i, x_{-i}) = m_i$$

- אם כך הסרת אסט' y_i אינה פוגעת בערך המקסמין.
- מש"ל

מחיקת אסטרטגיות נשלטות ומקסמין

- אם מוחקים אסטרטגיה נשלטת של שחקן j אזי ערך המקסמין של שחקן i עלול להשתנות. לדוגמה:

	L	R
T	1,1	0,3
B	2,4	1,1

- ערך המקסמין של שחקן 2 הוא $m_2 = 1$.
- T נשלטת ע"י B, ולאחר מחיקתה מתקיים $m_2 = 4$.
- **משפט:** מחיקת אסטרטגיה של שחקן j לעולם אינה מקטינה את ערך המקסמין של שחקן i.
- **הוכחה:** תרגיל בית.

משחקי סכום אפס

- משחק שני שחקנים נקרא ***משחק סכום אפס*** אם לכל וקטור אסטרטגיות (x_1,x_2) מתקיים

$$u_1(x_1,x_2)+u_2(x_1,x_2)=0$$

- משחק כזה מתאר מצב בו האינטרסים של השחקנים מנוגדים לחלוטין.
- הפסד של שחקן אחד הוא הרווח של השחקן השני.
- ניתן לתאר משחקים בהם יש רק שתי תוצאות {הפסד, נצחון} כמשחק סכום אפס.
- גם משחקים בהם יש שלוש תוצאות של {הפסד, תיקו, ניצחון} ניתן לתאר כמשחק סכום אפס.
- משחקי הימורים בהם השחקן המנצח לוקח את כל הקופה הם גם משחקי סכום אפס (לדוג' פוקר בשני שחקנים).

משחקי סכום אפס – כתיב מקוצר

- במקום לרשום

	L	R
T	1,-1	0,0
B	2,-2	-1,1

- נרשום רק את התשלום של שחקן 1

	L	R
T	1	0
B	2	-1

משחקי סכום אפס – כתיב מקוצר - המשך

- במקום להשתמש בשתי פונקציות תשלום נשתמש רק בפונקצית תשלום יחידה $u_1(x_1,x_2) =: u(x_1,x_2)$ ואז כמובן מתקיים $u_2(x_1,x_2) = -u(x_1,x_2)$.

- לפי הגדרת u שחקן 1 מנסה **למקסם** את ערכה, ואילו שחקן 2 מנסה **למזער** את ערכה.

דוגמה – זוג או פרט

- כל אחד משני שחקנים בוחר מספר (H – זוג או T – פרט).
- אם התוצאות זהות HH או TT אזי שחקן 1 מנצח ושחקן 2 מעביר לו שקל.
- אם התוצאות שונות HT או TH אזי שחקן 2 מנצח ושחקן 1 מעביר לו שקל.

	שחקן 2: H	שחקן 2: T
שחקן 1: H	1	-1
שחקן 1: T	-1	1

ערכי מינמקס ומקסמין במשחק סכום אפס

- נחשב את ערך המקסמין של שחקן 2:

$$m_2 = \max_{x_2 \in S_2} \min_{x_1 \in S_1} -u(x_1, x_2) = -\min_{x_2 \in S_2} \max_{x_1 \in S_1} u(x_1, x_2)$$

(השיוויון הימני נכון בגלל שהוצאת מינוס הופכת max ל min ולהפך).

- הערך

$$\bar{v} = \min_{x_2 \in S_2} \max_{x_1 \in S_1} u(x_1, x_2)$$

נקרא ***ערך המינמקס של המשחק***.

בהתאמה נקרא ל

$$\underline{v} = \max_{x_1 \in S_1} \min_{x_2 \in S_2} u(x_1, x_2)$$

ערך המקסמין של המשחק.

פירוש של ערכי המינמקס והמקסמין

- ערך המקסמין $\underline{v}$ של המשחק הוא ערך המקסמין של שחקן 1, ולכן הוא קובע את הסכום המינימלי ששחקן 1 יכול להבטיח לעצמו.

- ערך המינמקס של המשחק הוא מינוס ערך המקסמין של שחקן 2. כלומר שחקן 2 יכול להבטיח לעצמו סכום מינימלי של $-\bar{v}$.

- זה שקול לכך ששחקן 2 יכול להבטיח ששחקן 1 יקבל לכל היותר $\bar{v}$.

דוגמאות לחישוב המקסמין/מינמקס

- **משחק התאמת המטבעות:**

שחקן 2

		H	T	MIN
שחקן 1	H	1	-1	-1
	T	-1	1	-1
	MAX	1	1	$\underline{v}=-1\ \ \bar{v}=1$

- במשחק זה אנו רואים שייתכן ו- $\underline{v} \neq \bar{v}$

דוגמאות לחישוב המקסמין/מינמקס - המשך

שחקן 2

שחקן 1	L	C	R	MIN
T	3	-5	-2	-5
M	1	4	1	1
B	6	-3	-5	-5
MAX	6	4	1	$\underline{v}=1$ $\bar{v}=1$

זוג אסטרטגיות מקסמין הוא (M,R) והוא גם נקודת שיווי משקל נאש.

פירוש של ערכי המינמקס והמקסמין – המשך

- אם שני השחקנים ישחקו באסטרטגיות מקסמין שלהם, נקבל שהתשלום של שחקן 1 מוגבל ע"י

$$\underline{v} \le u(x_1, x_2) \le \bar{v}$$

- בפרט קיבלנו ש $\underline{v} \le \bar{v}$.

- אם מתקיים $\underline{v} = \bar{v}$ נאמר ש- ***למשחק יש ערך*** ו $v := \underline{v} = \bar{v}$ נקרא ה- ***ערך של המשחק***.