פתרון

1.הוכיחו: A $\in$–טרנזיטיבית אמ"ם $\cup A\subseteq A$.

פתרון: $\Longleftarrow$ נניח שA $\in$- טרנזיטיבית. יהי $y\in\cup A$. כלומר, קיים $x\in A$ כך ש $y\in x$.
A $\in$טרנזיטיבית, ולכן $y\in A$. כלומר, $\cup A\subseteq A$.

$\Longrightarrow$: נניח ש $\cup A\subseteq A$. יהי $y\in x\in A$. $x\in A$ ולכן $x\subseteq\cup A$. נובע מכך ש $y\in\cup A$.
אבל, $\cup A\subseteq A$ ולכן $y\in A$. כלומר, A $\in$- טרנזיטיבית.

2. יהיו $\{A_i\}$ קבוצות $\in$–טרנזיטיביות. הוכיחו: $\cap A_i$ ו$\cup A_i$ הן קבוצות $\in$–טרנזיטיביות.

פתרון: $\cap A_i$: יהי $y\in x\in\cap A_i$. מהגדרת חיתוך, לכל i, $x\in A_i$. כל הקבוצות טרנזיטיביות, ולכן לכל i, $y\in A_i$. $\Longleftarrow$ $y\in\cap A_i$.

$\cup A_i$: יהי $y\in x\in\cup A_i$. מהגדרת איחוד, קיים i כך ש $x\in A_i$. A_i טרנזיטיבית ולכן $y\in A_i$. $\Longleftarrow$ $y\in\cup A_i$.

3. תהי A קבוצה. נסמן: $A_0=A$, $A_n=A_{n-1}\cup(\cup A_{n-1})$, $tc(A)=\cup A_n$.
הוכיחו: $tc(A)$ היא הקבוצה ה$\in$- טרנזיטיבית המינימלית שמכילה את A.

פתרון: ראשית, נוכיח שהיא מכילה את A.
$A=A_0\subseteq\cup A_n$.
שנית, נוכיח שהקבוצה $\in$- טרנזיטיבית.
יהי $y\in x\in tc(A)$. $x\in tc(A)$ $\Longleftarrow$ $\exists n: x\in A_n$. $\Longleftarrow$ $y\in A_{n+1}$ $\Longleftarrow$ $y\in\cup A_n$ $x\in A_n$ $\Longleftarrow$ $x\subseteq\cup A_n$ $\Longleftarrow$ $y\in\cup A_n$.
כעת, נוכיח ש$tc(A)$ הוא הראשון שמקיים זאת.
תהי B קבוצה $\in$–טרנזיטיבית כך ש $A\subseteq B$. נוכיח ש $tc(A)\subseteq B$. נוכיח את זה באינדוקציה.
עבור $n=0$: נתון ש $A\subseteq B$.
נניח ש $A_n\subseteq B$. נוכיח ש $A_{n+1}\subseteq B$.
B טרנזיטיבית, ולכן $\cup A_n\subseteq B$. אזי $A_{n+1}=A_n\bigcup(\cup A_n)\subseteq B$.

4. תנו דוגמא לקבוצה $\in$- טרנזיטיבית שאינה סודר.

פתרון: $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$. קל לראות שהיא $\in$- טרנזיטיבית. היא אינה סודר כי $\in$ לא מהווה עבורה יחס סדר בכלל. הוא לא טרנזיטיבי: $\emptyset\in\{\emptyset\}\in\{\{\emptyset\}\}$, אבל $\emptyset\notin\{\emptyset\}$.

5. יהיו α,β סודרים. הוכיחו: $s(\alpha)<s(\beta) \iff \alpha<\beta$.

פתרון: $\Longrightarrow$: יהיו $\alpha<\beta$. הוכחנו בתרגול ש $s(\alpha)$ הוא הסודר הראשון שגדול מα, לכן $\beta\le s(\alpha)$. כמו כן, $s(\beta)$ הוא הסודר הראשון שגדול מβ ולכן $s(\alpha)\le s(\beta)$.
נניח בשלילה ש$s(\alpha)=s(\beta)$. אזי, $\beta\in s(\beta)=s(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$. כלומר, $\beta\in\alpha$ או $\beta=\alpha$. במילים אחרות, $\beta\le\alpha$. בסתירה לנתון.
לכן, $s(\alpha)<s(\beta)$.

$\Longleftarrow$:נניח ש $s(\alpha)<s(\beta)$. $\alpha\in s(\alpha)\in s(\beta)$ $\Longleftarrow$ $\alpha\in s(\beta)$. לכן $\alpha=\beta$ או $\alpha<\beta$.
אם $\alpha=\beta$ אז $s(\alpha)=s(\beta)$, בסתירה. לכן, $\alpha<\beta$.