תרגיל בית 6

1. הוכיחו כי לא כל הקבוצות המדידות לבג ב $\mathbb{R}$ מדידות בורל וכי לא כל פונקציה קציפה מעתיקה קבוצה מדידה לבג לקבוצה מדידה לבג.

הדרכה:

א. הגדירו את הפונקציה $g=\varphi+x$ המוגדרת על הקטע $[0,1]$ כאשר φ הינה פונקצית קנטור אשר הגדרנו בכיתה. הראו כי g רציפה, חד חד ערכית, עולה ממש ועל $[0,2]$.

ב. הראו כי $g\left([0,1]\setminus \mathrm{C}\right)$ הינה קבוצה פתוחה עם מידת לבג 1 .מכאן שלקבוצה $g\left(C\right)$ מידה 1 כאשר C הינה קבוצת קנטור.

ג. השתמשו בעובדה כי אם E הינה קבוצה עם מידה חיובית אזי קיימת קבוצה $M\subseteq E$ כך ש M איננה מדידה לבג(לא למדנו את זה אבל זה נכון) והראו כי קיימת קבוצה לא מדידה ב $[0,2]$ כך ש $K=g^{-1}\left(M\right)$ הינה מדידה לבג.

ד. הראו כי K איננה מדידה בורל וכי $g\left(K\right)=M$.

פתרון:

א. g רציפה כסכום של פונקציות רציפות וכן עולה ממש כי x עולה ממש ו φ עולה. מכאן כי היא חד חד ערכית ומכיוון ש $g\left(0\right)=0, g\left(1\right)=2$ נקבל כי g על $[0,2]$.

ב. עפ"י משפט מאינפי, מכיוון ש g עולה ממש ורציפה אזי g^{-1} גם כן רציפה. מכאן ש g הינה הומאומורפיזם ו $g\left([0,1]\setminus \mathrm{C}\right)$ הינה פתוחה. מכאן ש $m\left(g\left(C\right)\right)=m\left([0,2]\right)-m\left(g\left([0,1]\setminus \mathrm{C}\right)\right)=1$.

ג. קיימת קבוצה $M\subseteq g\left(C\right)$, מכאן נובע כי $K=g^{-1}\left(M\right)\subseteq C\Rightarrow m\left(K\right)=0$ ולכן K מדידה.

ד. מכיוון g^{-1} רציפה נובע כי היא מדידה בורל. מכאן שלו K הייתה מדידה בורל אזי $g\left(K\right)$ הייתה מדידה בורל בניגוד למה שראינו ולכן סתירה. $g\left(K\right)=M$ נובע מהחד חד ערכיות.

2. נניח ו μ הינה מידה סופית . הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית הינה אינטגרבילית אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x: f\left(x\right)\geq n\right\}\right)<\infty$.

פתרון:

$\Leftarrow$: אם f אינטגרבילית. נרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x: f\left(x\right)\geq n\right\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int 1_{\left(\left\{x: f\left(x\right)\geq n\right\}\right)}d\mu=\int\sum_{n=1}^{\infty}1_{\left\{x: f\left(x\right)\geq n\right\}}d\mu$$
$$=\int\sum_{n=1}^{\infty}n_{\left\{x: n+1>f\left(x\right)\geq n\right\}}d\mu$$
.

הפונקציה $g\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n_{\left\{x: n+1>f\left(x\right)\geq n\right\}}$ הינה למעשה $\lfloor f\left(x\right)\rfloor$ פונקצית פלור, השלם הגדול ביותר מכל השלמים שקטנים מהערך $f\left(x\right)$. כך שלמעשה הפונקציה $g\left(x\right)$ נשלטת ע"י הפונקציה $f\left(x\right)$ ולכן אינטגרבילית.

$\Rightarrow$: אם הטור מתכנס. אזי נוסיף את פונקצית האינדיקטור ונקבל כי $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)+1$. כמו כן , $g\left(x\right)+1$ אינטגרבילית כי המידה הינה סופית ולכן גם f אינטגרבילית.