

לינארית להנדסה- תיאורטי 3

תרגיל 1. תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 7}$ כך ש- $\text{rank}(A) = 3$

1. האם השורות A הן בסיס ל- $R(A)$
2. האם עמודות A הן בסיס ל- $C(A)$
3. מה המימד של מרחב האפס של A ?

תרגיל 2. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ מצאו בסיס ל- $N(A), C(A), R(A)$

תרגיל 3. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי $U = \{p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(0) + x^2 \cdot p''(0)\}$

תת קבוצה של V ($p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$)

1. הוכיחו ש- U תת מרחב של V .

2. מצאו בסיס ומימד ל- U .

תרגיל 4. יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הוכח/הפרך.

1. נתון ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A)$ אז העמודות של A ת"ל

2. $\dim(N(A)) = \text{rank}(A)$

3. $\text{rank}(A) = n$ אם ורק אם A הפיכה

4. $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

תרגיל 5. יהי $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($n > 1$) אז $A = vv^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ האם המטריצה A הפיכה? במידה וכן מצא v כזה, אחרת הוכח שאינה הפיכה.

תרגיל 6. נתונים הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. השלימו את $\{v_1, v_2\}$ כך שיהיה בסיס ל- \mathbb{R}^3 .
2. מצאו קבוצה B בת"ל, כך ש $B \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ופורשת את $Sp\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, האם B הוא בסיס ל- \mathbb{R}^3 ? נמקו.

תרגיל 7. יהי $V = \mathbb{R}^2$ מ"ו נגדיר $v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. הוכיחו שזאת מכפלה פנימית.
2. חשבו את $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ מה ניתן לומר על הווקטורים הללו?
3. הוכיחו שלכל $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + x_2 y_2 + y_2^2}$$

רמז: אי-שיוון המשולש

תרגיל 8. יהיו $x, y \in V / \{0\}$ נגדיר $u = x - \frac{\langle x, y \rangle y}{\|y\|^2}$

1. הוכיחו ש- u ניצב ל- y כלומר $\langle u, y \rangle = 0$
2. הוכיחו ש- $\langle u, u \rangle = \langle u, x \rangle$
3. הראו ש- $0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}$. רמז: נשים לב ש- $0 \leq \langle u, u \rangle$
4. הסיקו את אי שיוויון קושי שורץ.

בהצלחה!!