ב"ש אנליזה 2 תשעח מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בשברים חלקיים: כיוון ש x^2+x+1 ו x אי פריקים, קיימים A,B,C קבועים כך ש

$$\frac{x^2+1}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

ונעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל

$$x^2+1=A\left(x^2+x+1\right)+\left(Bx+C\right)x$$

כעת- נציב $x=0$ לקבל $A=1$ ואז השיוויון הוא

$$-x=\left(Bx+C\right)x$$

ונחלק ב x (אח"כ לא נציב $x=0$ אז זה בסדר) לקבל

$$-1=Bx+C$$

ומכאן ש $B=0, C=-1$ לפי השוואת מקדמים של חזקות של x. סה"כ קיבלנו

$$\int\frac{x^2+1}{x\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\ln|x|-\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

נמשיך עם האינטגרל שנשאר לנו בעזרת השלמה לריבוע

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(x+0.5\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right]}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c} t=\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\\ \sqrt{\frac{3}{4}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}\left[t^2+1\right]}=$$

$$=t=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan t+C=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+C$$

ולכן בסה"כ

$$\int \frac{x^2+1}{x\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+C$$

(ב) $\int e^{2x}e^{(e^x)}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בהצבה :

$$\int e^{2x}e^{(e^x)}\mathrm{d}x = \int \left(e^x\right)^2 e^{(e^x)}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t=e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x \end{array}\right\}$$
$$= \int te^t\mathrm{d}t$$

ונמשיך בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int te^t\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{cc} f=t & f'=1 \\ g'=e^t & g=e^t \end{array}\right\} = te^t - \int e^t\mathrm{d}t = te^t - e^t + C$$

ואם נחזיר למונחי x נקבל שהתשובה הסופית היא

$$\int e^{2x}e^{(e^x)}\mathrm{d}x = e^x e^{(e^x)} - e^{(e^x)} + C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

פתרון: <u>אסימפטוטות אנכיות:</u> הפונקציה לא מוגדרת באפס וב $\frac{\pi}{2}$, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \{\frac{1}{0}\cdot\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}\} = \pm\infty$$

כאשר מצד ימין נקבל ∞ ומצד שמאל נקבל $-\infty$. לכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x=0$. נבדוק את הגבול השני

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x}\frac{\cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \{\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cdot(-1)\} = -\frac{2}{\pi}$$

כאשר מסתמכים על הגבול

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin(x)}{1} = -1$$

ולכן אין אסימפטוטה אנכית ב $x=\frac{\pi}{2}$.

<u>אסימפטוטה משופעת מימין:</u> נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos(x) = \{0\cdot\text{חסומה}\} = 0$$

ו

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}-0=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos(x)=\{0\cdot\text{חסומה}\}=0$$

ולכן $y=0$ אסימפטוטה משופעת מימין.

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל:</u> נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(x)}{x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos(x)=\{0\cdot\text{חסומה}\}=0$$

ו

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(x)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}-0=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos(x)=\{0\cdot\text{חסומה}\}=0$$

ולכן $y=0$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^3}\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא 0 שהרי ב $x=1$ ובאף נקודה אחרת, הפונקציה לא מתאפסת. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ שמתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר. הפונקציות $\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^3}$ ו $\frac{1}{x}$ חיוביות בתחום $(0,1)$ שהרי $\sin(x)$ חיובית עבור $0<x<\frac{\pi}{2}$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^3}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}=1$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{-2x}^{x^2}e^{\left(t^2\right)}\mathrm{d}t}{x}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to0}\int_{-2x}^{x^2}e^{\left(t^2\right)}\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $e^{\left(t^2\right)}$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{-2x}^{x^2}e^{\left(t^2\right)}\mathrm{d}t}{x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot e^{\left(x^4\right)}-(-2)\,e^{\left((-2x)^2\right)}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot e^{\left(x^4\right)}+2e^{\left(4x^2\right)}}{1}=0+2e^0=2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt[n]{e^{k+n}}}{n}$

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt[n]{e^{k+n}}}{n}=\sum_{k=1}^n\frac{\left(e^{k+n}\right)^{\frac{1}{n}}}{n}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\left(e^{\frac{k}{n}+1}\right)$$

ועבור $f(x)=e^{x+1}$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{k}{n}+1}\right)\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{x+1}\mathrm{d}x=e^{x+1}\Big|_0^1=e^2-e$$

.4

(א) קרבו את $\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, נקבל

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ולכן

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

וקיבלנו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|\le\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right|=\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\le\frac{1}{100}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^2}<\frac{1}{120}<\frac{1}{100}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^n}$.

פתרון: מתקיים ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^n}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$$

ו $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ זהו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ שהציבו בו $x=-0.5$. כיוון ש $|-0.5|<1$ הוא נמצא ברדיוס ההתכנסות ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-(-0.5))^2} = \frac{1}{1.5^2} = \frac{4}{9}$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית היא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = -\frac{2}{9}$$

5. תהא f פונקציה, כך שלכל $x>0$ מתקיים כי $f'(x)>0$ וגם $f''(x)<0$.

(א) הוכיחו/הפריכו: ל f יש אסימפטוטה אנכית ב $x=0$.
פתרון: הפרכה: $f(x)=-e^{-x}$ מקיימת כי $f'(x)=e^{-x}>0$ ו $f''(x)=-e^{-x}<0$ שאין לה אסימפטוטה אנכית ב $x=0$ (לא לא באף מקום אחר) מכיוון שהיא רציפה בכל $\mathbb{R}$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: קיים x עבורו $f(x)<x$.
פתרון: הפרכה: $f(x)=-e^{-x}+x+1$ מקיימת כי $f'(x)=e^{-x}+1>0$ ו $f''(x)=-e^{-x}<0$ ולכל $0 \le x$ מתקיים ש

$$f(x) = -e^{-x}+x+1 \geq -1+x+1 > x$$

כאשר אי השיוויון האדום נובע מכך ש $-e^{-x}$ פונקציה עולה ולכן הערך הקטן ביותר שלה בתחום $[0,\infty)$ הוא $-e^0=-1$.
בשביל להסתדר גם עם החלק השלילי, נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x}+x+1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

ואז בודאי שגם לכל x שלילי מתקיים $f(x)=1 \geq x$.