אלגברה לינארית 1 – תרגיל להגשה

סמסטר א', תשע"ו

הוראות התרגיל הזה הוא תרגיל רשות, הניתן כתרגול נוסף. אין חובה להגיש אותו, אך כל תרגיל שיוגש ייבדק (וכך תוכלו להתאמן על כתיבת פתרונות והוכחות). ניתן להגיש את התרגיל עד ל-8.1.16. מי שיגיש לאחר מכן – תרגילו לא ייבדק!

הערה חשובה בכל מקום בתרגיל הזה, כאשר יש שאלות "האם" או "הוכיחו או הפריכו", הכוונה היא: הוכיחו את הטענה, או מצאו דוגמה נגדית מפורשת.

בהצלחה!

הערה. לאורך כל התרגיל, כל המרחבים הווקטוריים הם ממימד סופי.

שאלה 1. נסתכל על $V = \mathbb{R}^n$, ונגדיר בו

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \dots + x_n = 0\} \\ W &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = \dots = x_n\} \end{aligned}$$

א. הוכיחו כי $U, W \subseteq V$ הם תת-מרחבים של V.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-U ול-W.

ג. הוכיחו כי $V = U \oplus W$.

שאלה 2. יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $U \subseteq V$ תת-מרחב של V.

א. הוכיחו כי קיים תת-מרחב $W \subseteq V$ של V שעבורו $V = U \oplus W$.

ב. האם W הזה יחיד? כלומר, אם $U \oplus W = V = U \oplus W'$, האם בהכרח $W = W'$?

שאלה 3. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים שלו המקיימים $\dim U + \dim W > \dim V$. הוכיחו:

א. $V \neq U \oplus W$.

ב. אם $V = U + W$, אזי קיים תת-מרחב $W' \subseteq W$ שעבורו $V = U \oplus W'$.

שאלה 4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי B בסיס סדור של V, ותהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה הפיכה. הראו כי קיים בסיס סדור B' של V יחיד שעבורו $[I]_{B'}^{B} = A$.

שאלה 5. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצות.

א. הוכיחו או הפריכו:

- $\text{rank}\left(A+B\right) \leq \text{rank}\left(A\right) + \text{rank}\left(B\right)$.
- $\text{rank}\left(A+B\right) \geq \text{rank}\left(A\right) + \text{rank}\left(B\right)$.

ב. כעת נניח $m > n$. האם ייתכן ש-AB הפיכה? האם ייתכן ש-BA הפיכה?

ג. הוכיחו: כל מטריצה הפיכה היא בהכרח ריבועית.

שאלה 6. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה, כך שלכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון למערכת $Ax = b$. הוכיחו כי לכל $b \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $Ax = b$.