

# אלגברה לינארית 1 – תרגיל להגשה

סמסטר א', תשע"ו

**הוראות** התרגיל הזה הוא תרגיל רשות, הניתן כתרגול נוסף. אין חובה להגיש אותו, אך כל תרגיל שיוגש ייבדק (וכך תוכלו להתאמן על כתיבת פתרונות והוכחות). ניתן להגיש את התרגיל עד ל-7.1.16. מי שיגיש לאחר מכן – תרגילו לא ייבדק!

**הערה חשובה** בכל מקום בתרגיל הזה, כאשר יש שאלות "האם" או "הוכיחו או הפריכו", הכוונה היא: הוכיחו את הטענה, או מצאו דוגמה נגדית מפורשת.

## בהצלחה!

הערה. לאורך כל התרגיל, כל המרחבים הווקטוריים הם ממימד סופי.

**שאלה 1.** נסתכל על  $V = \mathbb{R}^n$ , ונגדיר בו

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$
$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$$

א. הוכיחו כי  $U, W \subseteq V$  הם תת-מרחבים של  $V$ .

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $U$  ול- $W$ .

ג. הוכיחו כי  $V = U \oplus W$ .

**שאלה 2.** יהי  $\mathbb{F}$  שדה, יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ויהי  $U \subseteq V$  תת-מרחב של  $V$ .

א. הוכיחו כי קיים תת-מרחב  $W \subseteq V$  של  $V$  שעבורו  $V = U \oplus W$ .

ב. האם  $W$  הזה יחיד? כלומר, אם  $U \oplus W = V = U \oplus W'$ , האם בהכרח  $W = W'$ ?

**שאלה 3.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ויהיו  $U, W \subseteq V$  תת-מרחבים שלו המקיימים  $\dim U + \dim W > \dim V$ . הוכיחו:

א.  $V \neq U \oplus W$ .

ב. אם  $V = U + W$ , אזי קיים תת-מרחב  $W' \subseteq W$  שעבורו  $V = U \oplus W'$ .

**שאלה 4.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , יהי  $B$  בסיס סדור של  $V$ , ותהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה הפיכה. הראו כי קיים בסיס סדור  $B'$  של  $V$  יחיד שעבורו  $[I]_{B'}^B = A$ .

**שאלה 5.** תהיינה  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  מטריצות.

א. הוכיחו או הפריכו:

•  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

•  $\text{rank}(A + B) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

ב. כעת נניח  $m > n$ . האם ייתכן ש- $AB$  הפיכה? האם ייתכן ש- $BA$  הפיכה?

ג. הוכיחו: כל מטריצה הפיכה היא בהכרח ריבועית.

**שאלה 6.** תהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה, כך שלכל  $b \in \mathbb{F}^n$  קיים פתרון למערכת  $Ax = b$ . הוכיחו כי לכל  $b \in \mathbb{F}^n$  קיים פתרון יחיד למערכת  $Ax = b$ .