

## תרגיל מספר 3 מבנים אלגבריים

30 בנובמבר 2014

1. תהא  $G$  חבורה. הוכח כי

(א)  $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}$  **פתרון:** יהיו  $g_1 g_2 \in G$ . צ"ל כי  $(g_1 g_2) g_2^{-1} g_1^{-1} = e$ . ואכן מקיבוציות נוכל לקבל כי

$$(g_1 g_2) g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 (g_2 g_2^{-1}) g_1^{-1} = g_1 e g_1^{-1} = g_1 g_1^{-1} = e$$

(ב) אם  $G$  חילופית אזי  $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1 g_2)^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1}$  **פתרון:** יהיו  $g_1 g_2 \in G$ . צ"ל כי  $(g_1 g_2) g_1^{-1} g_2^{-1} = e$ . ואכן מקיבוציות וחילופיות נוכל לקבל כי

$$(g_1 g_2) g_1^{-1} g_2^{-1} = (g_2 g_1) g_1^{-1} g_2^{-1} = g_2 (g_1 g_1^{-1}) g_2^{-1} = g_2 e g_2^{-1} = g_1 g_1^{-1} = e$$

2. תהא  $G$  חבורה בה מתקיים  $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1 g_2)^2 = g_1^2 g_2^2$ . הוכח כי  $G$  חבורה חילופית.

**פתרון:** יהיו  $g_1 g_2 \in G$ . לפי נתון מתקיים

$$g_1 (g_2 g_1) g_2 = (g_1 g_2) (g_1 g_2) = (g_1 g_2)^2 = g_1^2 g_2^2 = g_1 (g_1 g_2) g_2$$

נכפיל את השויון ב  $g_1^{-1}$  משמאל וב  $g_2^{-1}$  מימין ונקבל כי  $g_2 g_1 = g_1 g_2$ .

3. עבור  $\sigma \in S_n$  ומחזור  $(i_1, i_2, \dots, i_m) \in S_n$  הוכח כי מתקיים השויון הבא

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_m) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))$$

**פתרון:** ע"י הכפלה מימין ב  $\sigma$  ומשמאל ב  $\sigma^{-1}$  שקול להוכיח כי

$$(i_1, i_2, \dots, i_m) = \sigma^{-1}(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m)) \sigma$$

יהא  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$  צריך להוכיח כי שתי הפונקציות (משני צידי השויון) מעתיקות אותו לאותו מספר.

אם  $x \in \{i_1, \dots, i_m\}$  אזי  $x = i_k$  כלשהוא ואז

$$\sigma^{-1}(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m)) \sigma(i_k) = \sigma^{-1}(\sigma(i_{k+1})) = i_{k+1}$$

(אם  $k = m$  אז נחליף את  $m+1$  ב-1)

ומצד שני

$$(i_1, i_2, \dots, i_m)(i_k) = i_{k+1}$$

ויש שיוון.

אם  $x \notin \{i_1, \dots, i_m\}$  אזי

$$\sigma^{-1}(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m)) \sigma(x) = \sigma^{-1} \sigma(x) = x$$

התמורה  $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))$  שולחת את  $\sigma(x)$  לעצמו כי אחרת  $\sigma(x) = \sigma(i_k)$  וכיון שזוהי תמורה (בפרט חח"ע) זה גורר כי  $x = i_k$  סתירה.

ומצד שני

$$(i_1, i_2, \dots, i_m)(x) = x$$

4. תרגיל מודרך: טענה קיימות  $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$  כך שכל  $\sigma \in S_n$  ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.

$$\text{כלומר } \sigma = \prod_{i=1}^N \tau_i \text{ כאשר לכל } i \text{ מתקיים } \tau_i \in \{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\}.$$

אנחנו נעבוד עם  $\sigma_1 = (1, 2, 3, \dots, n), \sigma_2 = (1, 2)$ .

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה  $(1, i)$  ניתן להציגו ע"י ע"י  $\sigma_1, \sigma_2$  והופכיהן. (רמז: תרגיל 3 יכול להיות לעזר

**פתרון:** יהיה  $(1, i)$  חילוף. מתקיים

$$\tau = \sigma_1 \sigma_2 = (2, 3, \dots, n) \text{ ואז } \tau^{i-2}(2) = i \text{ בנוסף } \tau^{i-2}(1) = 1.$$

נסמן  $\tau' = \tau^{i-2}$  ואזי לפי תרגיל 3 מתקיים  $\tau' \sigma_2 (\tau')^{-1} = (\tau'(1), \tau'(2)) = (1, i)$ .

(ב) הראה שכל חילוף  $(i, j)$  ניתן להביעו בעזרת  $\{(1, k)\}_{k>2}$

**פתרון:** מתקיים כי  $(1, i)(1, j) = (i, j)$

(ג) הוכח את הטענה.

**פתרון:** כל  $\sigma \in S_n$  ניתן להציגה כמכפלה של חילופים. לפי סעיפים קודמים:

כל חילוף נביע בעזרת מכפלה של שתי חילופים  $(1, k)(i, k')$ .

כל מכפלה כזאת נביע באמצעות  $(\tau')^{-1} \sigma_2 \tau'$  שזה אכן מכפלה שמעורבים בה רק תמורות מתוך  $\{\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\}$ .

5. נזכיר כי  $A_n$  היא תת קבוצה של  $S_n$  של התמורות הזוגיות ומהווה חבורה ביחס להרכבה.

מצא את המרכז שלה  $C(A_n)$

**פתרון:** במקרה של  $n \geq 4$ : נניח שקיימת  $\sigma \in C(A_n) \neq id$ . נשתמש בהצגה של

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots)(\dots) \dots (\dots)$$

נתסכל ב  $\tau = (i_1 i_2) (i_2 j)$  כאשר  $j \neq i_1, i_2$  (יש לפחות 2 אפשריות כאלה).  
 מהגדרת המרכז צריך להתקיים  $\sigma\tau = \tau\sigma$ . מתקיים  $\tau\sigma(i_1) = \tau(i_2) = j$ .  
 $\sigma\tau(i_1) = \sigma(i_2) = j$  ולכן  $\sigma(i_2) = j$  אבל ל-2 יש שתי אפשריות שונות.. סתירה.  
 $C(A_n) = \{id\}$  מסקנה  
 עבור  $n = 3$  נקבל כי  $A_3 = \{id, (1, 2), (2, 3), (1, 2, 3), (2, 3), (1, 2)\}$   
 והיא חבולה חילופית ולכן  $C(A_3) = A_3$   
 עבור  $n = 2$  נקבל כי  $A_2 = \{id\}$  ולכן שווה למרכז שלה.

6. שאלת בונוס (לא חובה) נגדיר

$$G = \left\{ (a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} \mid \forall i \# \{a_{i,j} \neq 0\}_{j \in \mathbb{N}} < \infty \wedge \forall j \# \{a_{i,j} \neq 0\}_{i \in \mathbb{N}} < \infty \right\}$$

כלומר אוסף המטריצות מגודל אינסופי  $\begin{pmatrix} * & * & \dots \\ & * & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$  המקיימות שבכל שורה (ובכל טור) יש מספר סופי של איברים שונים מאפס.

(א) הוכח כי  $G$  עם כפל מטריצות היא מונואיד (לא לשכוח להוכיח סגירות).  
**פתרון:** יהיו  $A, B \in G$ . נראה שבעמודה  $C_1(AB)$  יש מספר סופי של איברים שונים מאפס (לשאר העמודות והשורות הרעיון דומה).  
 $C_1(AB) = A \cdot C_1(B)$  נסמן את האיברים השונים מאפס בעמודה הראשונה של  $B$  ב  $b_{i_1,1}, b_{i_2,1}, \dots, b_{i_n,1}$  אזי נמשיך  
 $A \cdot C_1(B) = \sum_{k=1}^n b_{i_k,1} \cdot C_{i_k}(A)$  כיוון שבכל עמודה  $C_{i_k}(A)$  יש גם מספר סופי של איברים שונים מאפס (נניח שהמקס' בין כל העמודות הוא  $M$ ) אזי מספר האיברים שונים מאפס של  $C_1(AB)$  גם כן סופי כסכום סופי של דברים סופים (יהיו לכל היותר  $M \cdot n$  איברים שונים מאפס).  
 קיבוציות - נובע מקיבוציות של כפל מטריצות.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \text{ יחידה-}$$

(ב) עבור  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in G$  הוכח כי אין לה הופכי משמאל ומצא את כל ההופכים מימין שלה.

**פתרון:** אין הפיכות משמאל - צ"ל שלא קיימת  $B \in G$  כך ש  $BA = I$ . ואכן

$$C_1(BA) = B \cdot C_1(A) = B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

הפיכות מימין - צ"ל  $B \in G$  כך ש  $AB = I$ . נחשב: לכל  $i$  מתקיים כי  $R_i(I) = R_i(AB) = R_i(A) \cdot B = R_{i+1}(B)$

מספר סופי של איברים שונים מאפס.

$$B = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ולכן  $B$  מכילה רק