

גרפים מרחיבים – תרגיל בית מס' 1

להגשה: 26.11.15

שאלות שמסומנות מ (*) הינן קשות יותר ואינן חובה.

1. יהי $G(n, d)$ -גרף. הוכיחו כי:

א. הקוטר של G מקיים $diam(G) \geq \log_{d-1} n$.

ב. מספר הצביעה של G מקיים $\chi(G) \leq d + 1$.

ג. הגרף G קשיר אם ורק אם מתקיים $\lambda_2 < \lambda_1$.

ד. אם הגרף G קשיר, אז הוא דו-צדדי אם ורק אם מתקיים $\lambda_n = -\lambda_1$.

2. יהי $G(n, d)$ -גרף פשוט (כלומר, ללא לולאות וקשתות כפולות), ויהי G^c הגרף המשלים. נסמן את הערכים העצמיים של G ב- $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ ואת הערכים העצמיים של G^c ב- $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$. הוכיחו כי לכל $i \geq 2$ מתקיים

$$\lambda'_i = -1 - \lambda_{n+2-i}$$

3. נאמר שגרף הוא a -מרחיב אם לכל שתי קבוצות קדקדים S, T עם $|S|, |T| \geq \frac{n}{a}$ קיימת לפחות קשת אחת בין S ל- T . הוכיחו שכל (n, d, α) -גרף הוא $(1/\alpha)$ -מרחיב.

4. נאמר שגרף הוא (c, k) -מרחיב אם לכל קבוצה S בגודל k לכל היותר מתקיים $|\Gamma(S)| \geq c|S|$. נאמר שקדקד ב- $\Gamma(S)$ הוא "שכן יחיד" של S אם יש לו שכן אחד ויחיד ב- S .

א. יהי $G(n, d)$ -גרף (c, k) -מרחיב. הוכיחו כי לכל תת קבוצה S של $V(G)$ יש לפחות $\Omega(|S|(c - \frac{d}{2}))$ שכנים יחידים.

ב. הוכיחו כי לכל $d \geq 30$, קיים (n, d) -גרף שהוא $(\frac{n}{50d}, \frac{3d}{4})$ -מרחיב.

ג. הוכיחו כי לכל $0 < \rho < 1$, כל (n, d, α) -גרף הוא $(\rho n, \frac{1}{\rho + \alpha^2})$ -מרחיב.

5. יהי $G(n, d)$ -גרף. נגדיר הילוך מקרי על הגרף בצורה קצת שונה מאשר בהרצאה: בכל צעד, בסיכוי $1/2$ נשארים במקום ובסיכוי $1/2$ עוברים לשכן (באופן אוניפורמי על פני השכנים). נסמן ב- $Mix(G)$ (זמן הערבוב) את הזמן t המינימלי כך שלכל

התפלגות התחלתית P_0 מתקיים $\|P_t - u\|_1 \leq 1/2$, כאשר P_t היא ההתפלגות אחרי t צעדים של ההילוך.

א. הוכיחו כי $Mix(G) < \infty$, כלומר ההילוך אכן מתערבב לכל התפלגות התחלתית.
 ב. הוכיחו כי זמן הערבוב המקסימלי מתקבל כאשר P_0 מרוכזת על קודקוד בודד (כלומר, מתחילים את ההילוך מקודקוד מסוים).

ג. הוכיחו כי אם $Mix(G) = T$ אז לכל k טבעי, מתקיים $\|P_{kT} - u\|_1 \leq 2^{-k}$.
 ד. יהי G (n, d, α) -גרף. נתבונן בהילוך מקרי על G . הוכיחו כי מתקיים $\Omega(\text{diam}(G)) \leq Mix(G) \leq O(\log n / \log(\frac{1}{\alpha}))$.

6. א. (*) הוכיחו בעזרת שיטה הסתברותית כי לכל k, m טבעיים, קיים גרף שאינו מכיל מעגל באורך $k \geq m$, ובכל זאת מספר הצביעה שלו הוא לפחות m .

ב. (*) הציגו בניה מפורשת של גרף ללא משולשים (כלומר, ללא מעגל באורך 3) ועם מספר צביעה גדול כרצוננו.

בהצלחה!