תזכורת

יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית.

תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית, ו - $T^*: W \to V$ ההעתקה הצמודה ל - T.

יהי B בסיס אורתונורמלי עבור V ו - $\tilde{B}$ בסיס אורתונורמלי עבור W.

תהי A המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיסים $B, \tilde{B}$, ו – A' המטריצה המייצגת של T^* ביחס לבסיסים $\tilde{B}, B$.

אזי מתקיים: $A' = A^*$, כש - $A^* = \overline{A^t}$.

תכונות של ההעתקה הצמודה T^*

1. $(T+S)^* = T^* + S^*$
2. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
3. $(T^*)^* = T$
4. $(T \cdot S)^* = S^* \cdot T^*$

הוכחה

נבחר בסיסים אורתונורמליים ונשתמש בעובדה ש - $A' = A^*$. נתרגם את $1-4$ ללשון של מטריצות. (**תרגיל** – לבדוק!)

אופרטורים מיוחדים במרחבי מכפלה פנימית

נתבונן באופורטורים לינארים $T: V \to V$ כאשר V מרחב מכפלה פנימי. נבחר בסיס אורתונורמלי B של V, ונתבונן במטריצה המייצגת $A = [T]_B$.

הגדרה

יהי אופרטור $T: V \to V$.

T **אופרטור נורמלי** אם $T \cdot T^* = T^* \cdot T$,

T **אופרטור אוניטרי** אם $T \cdot T^* = T^* \cdot T = I$ (מעל $\mathbb{R}$ נקרא גם **אופרטור אורתוגונלי**)

T **אופרטור צמוד לעצמו** אם $T^* = T$ (מעל $\mathbb{R}$ נקרא גם **אופרטור סימטרי**)

הגדרה

תהי מטריצה A.

A **מטריצה נורמלית** אם $A \cdot A^* = A^* \cdot A$,

A **מטריצה אוניטרית** אם $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$ (מעל $\mathbb{R}$ נקראת גם **מטריצה אורתוגונלית**)

A **מטריצה צמודה לעצמה** או **מטריצה הרמטית** אם $A^* = A$ (מעל $\mathbb{R}$ נקרא גם **מטריצה סימטרית**)

משפט

T נורמלי $\Leftrightarrow$ A נורמלית.

T אוניטרי $\Leftrightarrow$ A אוניטרית.

T צמוד לעצמו $\Leftrightarrow$ A הרמטית.

הוכחה

מידית מהתכונה $A' = A^*$.

תכונות של אופרטורים נורמליים

משפט

אם $T: V \to V$ אופרטור נורמלי, אזי לכל $v \in V$ מתקיים $||T^*(v)|| = ||T(v)||$. להפך, אם לכל $v \in V$ מתקיים $||T^*(v)|| = ||T(v)||$ אזי T נורמלי.

הוכחה

נניח ש – T נורמלי.

$$||T(v)||^2 = < T(v), T(v) > = < v, T^*\big(T(v)\big) >$$

$$||T^*(v)||^2 = < T^*(v), T^*(v) > = < v, (T^*)^*\left(T^*(v)\right) > = < v, T\left(T^*(v)\right) >$$

T נורמלי לכן $T\left(T^*(v)\right) = T^*\left(T(v)\right)$, לכן: $||T(v)|| = ||T^*(v)||$.

נניח ש – $||T(v)|| = ||T^*(v)||$ לכל $v \in V$. נוכיח: $< T(v), T(w) > = < T^*(v), T^*(w) >$ לכל זוגות $v, w \in V$.

ניעזר בזהות הפולרית.

(**תזכורת**: $< v, w > = \frac{1}{2}\left(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right) + \frac{1}{2}i\left(||v+iw||^2 - ||v||^2 - ||w||^2\right)$)

$$< T(v), T(w) > = \frac{1}{2}\left(||T(v)+T(w)||^2 - ||T(v)||^2 - ||T(w)||^2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}i\left(||T(v)+iT(w)||^2 - ||T(v)||^2 - ||T(w)||^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(||T(v+w)||^2 - ||T(v)||^2 - ||T(u)||^2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}i\left(||T(v+iw)||^2 - ||T(v)||^2 - ||T(w)||^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(||T^*(v+w)||^2 - ||T^*(v)||^2 - ||T^*(w)||^2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}i\left(||T^*(v+iw)||^2 - ||T^*(v)||^2 - ||T^*(w)||^2\right)$$

מהשוויון $< T(v), T(w) > = < T^*(v), T^*(w) >$ נקבל את התוצאה הנדרשת.

$$< v, T^*\left(T(w)\right) > = < v, T\left(T^*(w)\right) >$$

לכל $v, w \in V$, לכן:

$$< v, \overbrace{T^*\left(T(w)\right) - T\left(T^*(w)\right)}^{u} > = 0$$

לכל $v, w \in V$.

ניקח $v = u$, ונקבל $< u, u > = 0$, לכן: $u = \vec{0}$.

לכן: $T^*\left(T(w)\right) = T\left(T^*(w)\right)$ לכל $w \in V$.

לכן, $T^* \cdot T = T \cdot T^*$ כלומר, T נורמלי.

■

משפט

התכונות הבאות שקולות:

א) T אוניטרי

ב) T שומר נורמה, ז"א $||T(v)|| = ||v||$ לכל $v \in V$.

ג) T שומר מרחקים, ז"א $d\big(T(v),T(w)\big)=d(v,w)$ לכל $v,w\in V$.

ד) T שומר מכפלה פנימית ז"א $<T(v),T(w)>=<v,w>$ לכל $v,w\in V$.

הוכחה

א ⇐ ד

נניח ש T – אוניטרי אז $T\cdot T^*=T^*\cdot T=I$

$$<T(v),T(w)>=<v,T^*\big(T(w)\big)>=<v,Id(w)>=<v,w>$$

ד ⇐ ב

נניח $<T(v),T(w)>=<v,w>$

$v=w$ נקבל $<T(v),T(v)>=<v,v>$

$$\left|\left|T(v)\right|\right|^2=\left|\left|v\right|\right|^2$$

$$\left|\left|T(v)\right|\right|=\left|\left|v\right|\right|$$

ב ⇐ ג

נניח $\left|\left|T(v)\right|\right|=\left|\left|v\right|\right|$

$$d\big(T(v),T(w)\big)=\left|\left|T(v)-T(w)\right|\right|=\left|\left|T(v-w)\right|\right|=\left|\left|v-w\right|\right|=d(v,w)$$

ג ⇐ ב

נניח $d\big(T(v),T(w)\big)=d(v,w)$.

ניקח $w=\vec{0}$

$$d\big(T(v),\vec{0}\big)=d\big(v,\vec{0}\big)$$

$$\left|\left|T(v)-\vec{0}\right|\right|=\left|\left|v-\vec{0}\right|\right|$$

$$\left|\left|T(v)\right|\right|=\left|\left|v\right|\right|$$

ב ⇐ ד

נניח $\left|\left|T(v)\right|\right|=\left|\left|v\right|\right|$

צריך להוכיח $<T(v),T(w)>=<v,w>$

נעזר בזהות הפולרית:

(תזכורת: $<v,w>=\frac{1}{2}\left(\left|\left|v+w\right|\right|^2-\left|\left|v\right|\right|^2-\left|\left|w\right|\right|^2\right)+\frac{1}{2}i\left(\left|\left|v+iw\right|\right|^2-\left|\left|v\right|\right|^2-\left|\left|w\right|\right|^2\right)$)

$$<T(v),T(w)>=\frac{1}{2}\left(\left|\left|v+w\right|\right|^2-\left|\left|v\right|\right|^2-\left|\left|w\right|\right|^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}i\left(\left|\left|v+iw\right|\right|^2-\left|\left|v\right|\right|^2-\left|\left|w\right|\right|^2\right)=<v,w>$$

$\boxed{ד \Leftarrow א}$

נתון: $< T(v), T(w) > = < v, w >$

$$< v, T^*T(w) > = < v, w >$$

$$< v, \overbrace{T \cdot T^*(w) - w}^{u} > = 0$$

$$< v, u > = 0$$

ניקח $u = v$, ונקבל $< u, u > = 0$, לכן $u = 0$.

$T \cdot T^*(w) = w$ לכל $w \in V$ לכן $T \cdot T^* = I$.

■

משפט

נניח $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

אופרטור ליניארי שומר זוויות, זאת אומרת $\cos\left(\widehat{T(v), T(w)}\right) = \widehat{v, w}$.

הוכחה

$$\cos\left(T(v) \hat{,} T(w)\right) = \frac{< T(v), T(w) >}{||T(v)|| \cdot ||T(w)||} = \frac{< v, w >}{||v|| \cdot ||w||} = \cos(\widehat{v, w})$$

הערה

שמירת זווית אינה מאפיינת אופטורים אוניטריים. קיימים אופרטורים שומרים זוויות שאינם אופרטורים אוניטריים.

דוגמה

$$T(v) = 2v$$

$$\cos\left(T(v) \hat{,} T(w)\right) = \frac{< T(v), T(w) >}{||T(v)|| \cdot ||T(w)||} = \frac{< 2v, 2w >}{||2v|| \cdot ||2w||} = \frac{< v, w >}{||v|| \cdot ||w||} = \cos(v, w)$$

אבל $||T(v)|| = ||w \cdot v|| = w||v||$ לכן T אינו אופרטור אוניטרי.

משפט

יהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע״ע של T. יהי $v \in V$ ו״ע המתאים ל $-\lambda$.

אזי, $T^*(v) = \bar{\lambda} v$.

הוכחה

נוכיח את זה למטריצות. נוכיח ש - $A^* v = \bar{\lambda} v$.

$$0 = ||Av - \lambda v|| = ||(A - \lambda I)v||$$

A נורמלי $\Leftarrow$ $A - \lambda I$ גם נורמלי.

לכן:

$$0 = ||(A-\lambda I)^* v|| = ||(A^* - \lambda I)(v)|| = ||A^*(v) - \bar{\lambda} v||$$

$$A^* v = \bar{\lambda} v$$

■