

סדרות וטורים של פונקציות

אינטואיציה

מתי ניתן להחליף סדר גבולות ?

נתבונן בביטוי :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{n \cdot |x|}$$

נראה האם ניתן להחליף את סדר הגבולות :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{n \cdot |x|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n \cdot |x|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \infty = \infty$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{n \cdot |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$\infty \neq 0$, לכן, כאן לא ניתן להחליף את סדר הגבולות.

■

הגדרה

עבור פונקציות f_n, f כאשר $n \in \mathbb{N}$, נאמר ש: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$, אם לכל $x \in X$ מתקיים :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

דורשים באופן מובלע שלכל $x \in X$, $dom(f_n), dom(f)$ כאשר $n \in \mathbb{N}$.

דוגמה 1

$$f_n(x) := \frac{1}{n \cdot x} ; \quad x \in (0,1)$$

לכל $x \in (0,1)$:

$$\frac{1}{n \cdot x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ בקטע $(0,1)$.

לכן, לכל $x \in (0,1)$, לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left| \frac{1}{n \cdot x} - 0 \right| < \varepsilon$$

יהי $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{1}{n \cdot x} - 0 \right| \stackrel{0 < x}{=} \frac{1}{n \cdot x} \stackrel{\text{דרוש}}{=} < \varepsilon$$

⇓

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot x} < n$$

לכן, מספיק, למשל:

$$N := \left[\frac{1}{\varepsilon \cdot x} \right] + 1$$

נשים לב ש- N זה תלוי ב- x .

■

דוגמה 2

$$f_n(x) := \frac{1}{n+x} \quad ; \quad x \in (0,1)$$

כאן: $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ בקטע $(0,1)$.

לכן, לכל $x \in (0,1)$, לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left| \frac{1}{n+x} - 0 \right| < \varepsilon$$

יהי $\varepsilon > 0$.

לכל $n \in \mathbb{N}$, לכל $x \in (0,1)$.

$$\frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן, קיים $N \in \mathbb{N}$ (למשל, $N := [1/\varepsilon] + 1$) כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

לכל $x \in (0,1)$, לכל $N \leq n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

נשים לב ש- N זה אינו תלוי ב- x .

■

הגדרה

עבור פונקציות f_n, f כאשר $n \in \mathbb{N}$, נאמר ש: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ במידה שווה בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$, אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

דוגמה

עפ"י הדוגמה השנייה:

$$\frac{1}{n+x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

במידה שווה בקטע $(0,1)$, ולמעשה, בכל \mathbb{R}^+ .

עפ"י הדוגמה הראשונה:

$$\frac{1}{n \cdot x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

אך לא במידה שווה בקטע $(0,1)$:

למשל, עבור $\varepsilon := 1/2$: לכל $n \geq 1$, ניקח $x_n := 1/n \in (0,1)$. אז:

$$|f_n(x_n) - 0| = f_n(x_n) = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n}} = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

■

הערה

יהיו f, f_n פונקציות המוגדרות בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$.

התכונות הבאות שקולות:

1. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ במידה שווה בתחום X .

2. מתקיים:

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3. לכל סדרה $x_n \in X$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הוכחה

$$\boxed{2 \Leftarrow 1}$$

נניח ש: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ במידה שווה בתחום X .

יהי $\varepsilon > 0$.

עפ"י ההנחה, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

\Downarrow

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

לכן:

$$\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

$$\boxed{3 \Leftarrow 2}$$

נניח שמתקיים:

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

תהי סדרה $x_n \in X$.

אזי:

$$0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ועפ"י משפט הסנדוויץ':

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

1 ← 3

נניח שלכל סדרה $x_n \in X$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

נניח בשלילה כי: $f_n \not\rightarrow f$ במידה שווה בתחום X .

לכן, קיים $\varepsilon > 0$, כך שלכל $N \in \mathbb{N}$, קיים $N \leq n \in \mathbb{N}$ עבורו קיים $x_n \in X$ כך ש:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

לכן, קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ עבורם קיים x_n כנ"ל.

עבור שאר ערכי $n \in \mathbb{N}$, ניקח $x_n \in X$ שרירותי.

אזי, הסדרה $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ מכילה תת סדרה שאיבריה גדולים או שווים מ- ε .

לכן:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0$$

■

דוגמה

המחשה של אפיון מספר (2).

$$f_n(x) := x^n \cdot (1 - x^n) \quad ; \quad x \in [0,1]$$

לכל $x \in [0,1]$ מתקיים:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

f, f_n רציפות, לכן:

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in [0,1]} \left| \overbrace{f_n(x)}^{\geq 0} - \overbrace{f(x)}^{=0} \right| = \max_{x \in [0,1]} f_n(x)$$

נחשב:

$$\max_{x \in [0,1]} f_n(x)$$

נציב:

$$t := x^n$$

לכן:

$$f_n(x) = x^n \cdot (1 - x^n) = t \cdot (1 - t) = g(t)$$

↓

$$g'(t) = 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \wedge g''(t) = -2 < 0$$

לכן:

$$\max_{x \in [0,1]} t \cdot (1 - t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

לכן:

$$x := \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

↓

$$\varepsilon_n = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \not\rightarrow 0$$

■

הקריטריון של קושי

יהיו פונקציות המוגדרות בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$

התכונות הבאות שקולות:

1. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ במידה שווה בתחום X עבור פונקציה f המוגדרת בתחום X .
2. לכל $0 < \varepsilon$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

הוכחה

$$\boxed{2 \Leftarrow 1}$$

נניח ש: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ במידה שווה בתחום X עבור פונקציה f המוגדרת בתחום X .
יהי $0 < \varepsilon$.

עפ"י ההנחה, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

↓

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)|$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

כדרוש.

$$\boxed{1 \Leftarrow 2}$$

נניח שלכל $0 < \varepsilon$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

יהי $x \in X$ קבוע.

עפ"י ההנחה, הסדרה $f_n(x)$ מקיימת את קריטריון קושי לסדרות, לכן קיים מספר ממשי, נסמנו

$$f(x), \text{ כך ש: } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

אזי, לכל $x \in X$ מתקיים: $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, כלומר: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$.

נראה שההתכנסות היא במידה שווה.

יהי $\varepsilon > 0$.

עפ"י ההנחה, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$, לכל $x \in X$ מתקיים:

$$\left| f_n(x) - \overbrace{f_m(x)}^{m \rightarrow \infty} \right| < \varepsilon$$

לכן, לכל $x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

הגדרה

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מתכנס לפונקציה $s(x)$ בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$, אם עבור הפונקציות:

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים: $s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s(x)$.

בפרט, מניחים שהפונקציות $f_n(x)$, $s(x)$ מוגדרות לכל $x \in X$.

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מתכנס במידה שווה לפונקציה $s(x)$ בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$, אם (בסימונים הנ"ל):

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

במידה שווה בתחום X .

דוגמה

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n ; \quad x \in [0,1)$$

מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x} = s(x)$$

לכן:

$$s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s(x)$$

אך לא במידה שווה:

עבור $\varepsilon := 1/2$, לכל $n \in \mathbb{N}$, ניקח: $x_n := \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$ ואז:

$$|s(x) - s_n(x_n)| = \frac{x_n^{n+1}}{1-x_n} \stackrel{0 \leq x < 1}{\geq} x_n^{n+1} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$$

■