

## פיסיקה למתמטיקאים 88-320

### תרגיל 6

1. הוכיחו כי אופרטור  $U$  משמר נורמה במרחב הילברט  $\mathcal{H}$  אסם הוא יוניטרי, כלומר  $U^\dagger = U^{-1} \iff \|U\varphi\| = \|\varphi\|, \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$  (הדרכה: על מנת להוכיח ש  $U$  יוניטרי התבוננו בוקטור  $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$  כאשר  $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$  ו  $\lambda$  סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית המתאימה עבור  $\lambda = 1$  ו  $\lambda = i$ ).

2. הוכיחו:

(א) את משפט ארנפסט (Ehrenfest): יהי  $A(t)$  אופרטור הרמיטי (באופן כללי תלוי מפורשות בזמן),  $H$  המילטוניאן, ו  $|\psi(t)\rangle$  מקיימת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

אזי

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

(ב) ע"י שימוש במשפט ארנפסט, כי מרכז המסה של פונקצית הגל של אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל  $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  מקיים את משוואת התנועה הקלאסית

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle x \rangle = 0$$

3. פונקצית הגל של חלקיק קוונטי בבור פוטנציאל אינסופי בזמן  $t = 0$  היא

$$\psi(x) = cx(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(א) מהו קבוע הנרמול  $c$ ?

(ב) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור  $(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$ ?

(ג) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק במצב העצמי  $k$  ה  $(\phi_k = \sqrt{2} \sin \pi k x)$  עבור אילו ערכי  $k$  ההסתברות היא 0?

(ד) מצאו ביטוי לפונקצית הגל כתלות בזמן,  $\psi(x, t)$  (ניתן להשאיר בצורת סכום).

4. אופרטור המתאר גודל פיזיקלי נתון ע"י  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(א) מהם הערכים האפשריים במדידת הגודל הפיזיקלי המתאים לאופרטור  $A$ ?

(ב) אם מצב המערכת נתון ע"י  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , מהם הערכים האפשריים במדידת

$A$  ובאילו הסתברויות הם מתקבלים (שימו לב, הוקטור אינו מנורמל)?

(ג) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , מהם הערכים האפשריים במדידת  $A$  ובאילו הסתברויות הם מתקבלים?

(ד) גודל פיזיקלי אחר מתואר ע"י האופרטור  $B = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  אם

מדדנו כרגע את הגודל הפיזיקלי המתאים ל  $B$  וקיבלנו שתוצאת המדידה היא 6, מה יתקבל אם נמדוד עכשיו את  $A$ ?