

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 6

1. הוכיחו כי אופרטור U משמר נורמה במרחב הילברט \mathcal{H} אם הוא יוניטרי, כלומר $U^\dagger = U^{-1} \iff \|U\varphi\| = \|\varphi\|, \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ (הדרכה: על מנת להוכיח ש U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית המתאימה עבור $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$).

2. הוכיחו:

(א) את משפט ארנפסט (Ehrenfest): יהי $A(t)$ אופרטור הרמיטי (באופן כללי תלוי מפורשות בזמן), H המילטוניאן, ו $|\psi(t)\rangle$ מקיימת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

אזי

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \langle \frac{dA}{dt} \rangle$$

(ב) ע"י שימוש במשפט ארנפסט, כי מרכז המסה של פונקצית הגל של אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ מקיים את משוואת התנועה הקלאסית

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle x \rangle = 0$$

3. פונקצית הגל של חלקיק קוונטי בבור פוטנציאל אינסופי בזמן $t = 0$ היא

$$\psi(x) = cx(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

- (א) מהו קבוע הנרמול c ?
- (ב) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$)?
- (ג) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק במצב העצמי k ($\phi_k = \sqrt{2} \sin \pi k x$) עבור אילו ערכי k ההסתברות היא 0?
- (ד) מצאו ביטוי לפונקצית הגל כתלות בזמן, $\psi(x, t)$ (ניתן להשאיר בצורת סכום).

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \phi_k(x)$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ כאשר}$$

4. אופרטור המתאר גודל פיזיקלי נתון ע"י

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (א) מהם הערכים האפשריים במדידת הגודל הפיזיקלי המתאים לאופרטור A ?
- (ב) אם מצב המערכת נתון ע"י $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים (שימו לב, הוקטור אינו מנורמל)?
- (ג) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים?
- (ד) גודל פיזיקלי אחר מתואר ע"י האופרטור $B = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ אם מדדנו כרגע את הגודל הפיזיקלי המתאים ל B וקיבלנו שתוצאת המדידה היא 6, מה יתקבל אם נמדוד עכשיו את A ?