ב"ש אנליזה 1 תשעט מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(3x))\cos(3\sin(5x))}{e^x-1}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(3x))\cos(3\sin(5x))}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(3x))}{\sin(3x)}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\cos(3\sin(5x))\cdot\frac{x}{3x}$$
$$=1\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(0)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

(ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)+x}{e^x+\cos(e^x)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)+x}{e^x+\cos(e^x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\left(\frac{\sin(x^2)}{x}+1\right)}{\left(1+\frac{\cos(e^x)}{e^x}\right)}=0\cdot\frac{(0+1)}{(1+0)}=0$$

כאשר הנימוק הוא

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

ו $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(e^x)}{e^x}==\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$ כי כולם מהצורה חסומה $(1/\sin(x^2)/\cos(e^x))$ כפול פונקציה ששואפת לאפס $(\frac{1}{e^x}/\frac{1}{x})$.

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{e^n}{n!}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n}=\frac{e^{n+1}}{e^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=e\cdot\frac{1}{n+1}\to 0$$

וכיוון ש $0<1$ נקבל ש $\lim a_n=0$.

2. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+a_n^2-1$ וכן נתון $a_1>1$.

(א) הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n>1$.

פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1>1$ והוא גדול ממש מ 1.

- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n > 1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} > 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2 - 1 = a_n^2 + (a_n - 1) > 1^2 + 0 = 1$$

כאשר אי השיוויון נובע מהנחת האינדוקציה.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: ראשית נשים לב שהסדרה עולה שהרי לפי הגדרה, לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} = a_n + a_n^2 - 1$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 1 = (a_n - 1)(a_n + 1)$$

ו $(a_n - 1)(a_n + 1) > 0$ כי ראינו בסעיף קודם ש $a_n > 1$. לכן לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} > a_n$.

אם הסדרה חסומה מלמעלה אז יש לסדרה גבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n \to L$ ולכן גם $a_{n+1} \to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n + a_n^2 - 1 \to L + L^2 - 1$$

כלומר $L = L + L^2 - 1$. נעביר אגף לקבל $L^2 - 1 = 0$ ולכן $L = \pm 1$. אבל הסדרה עולה ולכן לכל n מתקיים $a_n \geq a_1$ ולכן הגבול מקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_1 > 1$$

ולכן $L = \pm 1$ לא יכול להיות הגבול. מסקנה: הסדרה אינה חסומה ולכן הגבול שלה הוא ∞(כי היא עולה).

3. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & x > 0 \\ a & x \leq 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = a = \lim_{x\to 0^-} a$$

כיוון שהשיוויון הימני תמיד מתקיים נבדוק את מתי השיוויון השמאלי מתקיים: לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

ולכן רק עבור $a = 0$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a = 0$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x = 0$) אם

f גזירה ב $x = 0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

וערך זה שווה ל $f'(0)$. נחשב:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

ומצד שני

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\sin(x^2)}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$$

ולכן שני הגבולות אינן שווים ולכן f אינה גזירה ב $x = 0$.

4. יהא $a \in \mathbb{R}$ מספר ממשי.

(א) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^7 + e^x = a$.

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = x^7 + e^x - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = 7x^6 + e^x$$

ולכן $f'(x) > 0$ לכל x (כי $e^x > 0$ ו $7x^6 \geq 0$) לכן f עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד. בנוסף מתקיים כי

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^7 + e^x - a = \{-\infty + 0 - a\} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^7 + e^x - a = \{\infty + \infty - a\} = \infty$$

ולכן קיימים c, d כך ש $f(c) < 0, f(d) > 0$. בקטע $[c, d]$ הפונקציה f מחליפה סימן ורציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים חותך את ציר x, כלומר יש לה שורש בקטע זה. לסיכום: ל f יש לכל היותר שורש אחד וקיים לה שורש אחד ולכן יש לה בדיוק שורש אחד.

(ב) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{-x}{x^2+1} = e^x$.

פתרון: באופן שקול נבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $-x = e^x\left(x^2 + 1\right)$. נגדיר פונקציה

$$f(x) = e^x\left(x^2 + 1\right) + x$$

ונשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = e^x\left(x^2 + 1\right) + 2x \cdot e^x + 1 = e^x\left(x^2 + 2x + 1\right) + 1 = e^x\left(x + 1\right)^2 + 1$$

ולכן, $f'(x)>0$ לכל x ולכן f עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד. בנוסף מתקיים כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(x^2+1\right)+x = \{\infty+\infty\} = \infty$$

ובגלל ש

$$\lim_{x\to-\infty} e^x\left(x^2+1\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2+1\right)}{e^{-x}} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

נקבל ש

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x\left(x^2+1\right)+x = \{0-\infty\} = -\infty$$

ולכן קיימים c,d כך ש $f(c)<0, f(d)>0$. בקטע $[c,d]$ הפונקציה f מחליפה סימן ורציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים חותך את ציר x, כלומר יש לה שורש בקטע זה. לסיכום: ל f יש לכל היותר שורש אחד וקיים לה שורש אחד ולכן יש לה בדיוק שורש אחד.

5. בכל אחד מהסעיפים תנו דוגמה לפונקציה כזו, או שהוכיחו שלא קיימת דוגמה כזו:

(א) פונקציה המקיימת $f''(x)<0$ וגם $f'(x)<0$ לכל x וגם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

פתרון: הפונקציה $f(x)=-e^x$ מקיימת כי $f'(x)=-e^x, f''(x)=-e^x$ ושתיהן שליליות לכל x ומתקיים ש $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

(ב) פונקציה המקיימת $f''(x)<0$ וגם $f'(x)<0$ לכל x וגם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

פתרון: נניח בשלילה שקיימת כזאת פונקציה. לכל $x>0$, הפונקציה f רציפה וגזירה בקטע $[0,x]$ ולכן לפי משפט לגרנז' קיימת $0<c<x$ כך ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

כיוון ש ש $f''(x)<0$ נסיק ש $f'(x)$ יורדת ולכן $f'(c)\le f'(0)<0$. קיבלנו ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le f'(0) < 0$$

ונכפיל ב x (שחיובי) לקבל $f(x)-f(0)\le xf'(0)$. ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-f(0)\right] \le \lim_{x\to\infty}\left[xf'(0)\right] = \{\infty\cdot(-)\} = -\infty$$

אבל $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-f(0)\right] = \lim_{x\to\infty} f(x) - f(0) = 0 - f(0)$ וקיבלנו ש $-f(0)\le-\infty$ סתירה.