

## מד"ר, תרגול 9

11 בינואר 2014

עד עכשיו במקרה א' ראינו מה קורה כאשר ההפרש בין השורשים אינו שלם. ראינו גם כי עם הסינגולריות רגולריות צריך להתקיים

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)}$$
$$q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)}$$

אז ניתן להסיק את המשוואה האופיינית (האינדיקציאלית):

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0$$

**מקרה ב':**

אם  $\lambda_1 = \lambda_2$  אז  $y_1(x)$  כמו במקרה א':

$$y_2(x) = \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_2} = y_1(x) \cdot \ln(x) + \sum b_n (x - x_0)^{n+\lambda_1}$$

**מקרה ג':**

$\lambda_1 - \lambda_2$  מספר שלם אז  $y_1(x)$  כרגיל וכן

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - \lambda_2) \cdot y(x, \lambda)] \Big|_{\lambda=\lambda_2}$$

**דוגמה 1:** פתור את המד"ר סביב  $x = 0$ :

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

**פתרון :** נחפש האם ב  $x = 0$  יש נק' רגולרית:

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2} = 0$$

לכן נקבל את המשוואה:

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda = 0$$

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

לכן  $\lambda = 0$  לשורש מריבוי שני ואנחנו נמצאים במקרה ב'. לכן הפתרון:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$$

עבור  $y_2$  יש לגזור לפי  $\lambda$  ולהציב  $\lambda = 0$ :  $\frac{\partial y_1(x, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$ : נותר לנו למצוא תנאים על המקדמים. נציב במד"ר:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda-2}$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) x^{n+\lambda-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda) x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda+2} = 0$$

$$a_0 \lambda(\lambda-1) x^\lambda + a_1 (1+\lambda) \lambda x^{\lambda+1} + a_0 \lambda x^\lambda + a_1 (1+\lambda) x^{1+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) a_n + a_{n-2}] x^{n+\lambda} = 0$$

נציב  $\lambda = 0$ :

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n \cdot n(n-1) + n a_n + a_{n-2}] x^n = 0$$

$$n^2 a_n + a_{n-2} = 0$$

$$a_1 = 0$$

$a_0$  קבוע לא ידוע.

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n^2}$$

עבור  $n$  אי זוגי  $a_n = 0$ . עבור  $n$  זוגי:  $a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{4k^2} = \frac{-a_{2k-4}}{4k^2(2k-2)^2} = (-1)^k \cdot a_0 \cdot \frac{1}{(2k)^2(2k-2)^2 \dots 2^2}$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} \cdot x^{2k}$$

$$y_2(x) = \frac{\partial y_1(x, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

כדי למצוא את  $b_n$  צריך להציב במשוואה.

## התמרות לפלס

**הגדרה:** התמרת לפלס:

$$g(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

התמרת לפלס ההפוכה:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{c+ist} g(s) ds$$

כאשר  $e$  נמצאת מימין לכל קוטב של  $g$  (קוטב הוא נקודת אי ומוגדרות עבור  $(x-x_0)g_1(s)$ ). התמרת לפלס מעבירה ממרחב הזמן למרחב התדר.

**תכונות:**

$$1. \alpha \in \mathbb{C} \quad L(\alpha f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} \alpha f(t) dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \alpha L(f(t))$$

2.

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t))$$

**תרגיל:** חשבו את התמרות לפלס הבאות:

1.  $f(t) = 1$

2.  $f(t) = t$

3.  $f(t) = e^{at}$

4.  $f(t) = \sin t$

5.  $f(t) = \cos t$

6.  $f(t) = t$

**פתרון:**

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \quad .1$$

$$L(f(t)) = \int_0^\infty te^{-st} dt = -\frac{t}{s}e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2} \quad .2$$

$$L(t^n) = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{בצורה כללית, נקבל:}$$

$$L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad .3$$

.4

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \sin t dt = \frac{e^{-st}}{-s} \sin t \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt = \frac{1}{s} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \cos t \Big|_0^\infty - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin t dt \right] = \frac{1}{s^2} -$$

$$.L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}, L(\sin(at)) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{ולכן}$$

.5

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt = \frac{e^{-st}}{-s} \cos t \Big|_0^\infty - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin t dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+1-1}{s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$L(\cos(at)) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$f'(t) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = f(t)(e^{-st}) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sL(f(t)) \quad .6$$

:כך לדוגמה:

$$L(\cos(at)) = -\frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot 0) + s \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

**פתרון מד"ר באמצעות התמרת לפלס**

$$:L(x''(t) + \alpha x'(t) + bx(t)) = L(f(t)) \iff \begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + bx(t) & = f(t) \\ x(0) & = \alpha_0 \\ x'(0) & = \beta_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} sL(x''(t) + \alpha x'(t) + bx(t)) &= L(f(t)) \\ sL(x'(t)) - x'(0) + \alpha sL(x(t)) - \alpha x(0) + bL(x(t)) &= h(s) \\ s^2L(x(t)) - sx(0) - \beta_0 + \alpha sL(x(t)) - \alpha x(0) + bL(x(t)) &= h(s) \\ (s^2 + \alpha s + b)L(x(t)) &= h(s) + \alpha x(0) + \beta_0 \end{aligned}$$

$$g(s) = \frac{h(s) + \alpha x(0) + \beta_0}{s^2 + \alpha s + b}$$

$$\begin{cases} x'' + x = 1 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{תרגיל: חשבו את } x(t) \text{ עבור}$$

$$g(s) = \frac{\frac{1}{s}}{s^2 + 1} = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + 1}$$

$$1 = as^2 + a + bs^2 + cs$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \\ a = 1 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \\ x(t) &= 1 - \cos(t) \\ x' &= \sin(t) \\ x'' &= \cos(t) \\ x'' + x &= 1 \end{aligned}$$

כדרוש.