

תרגיל 11

1. הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול במונחי δ ו- ϵ כי מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-3} = -5 \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x} = 4 \quad (\text{ב})$$

פתרון:

(א) יהי $\epsilon > 0$.

נמצא מספר ממשי $\delta > 0$ שכך שלכל x יתקיים:

$$0 < |x - 2| < \delta \implies \left| \frac{2x+1}{x-3} + 5 \right| < \epsilon$$

טיוטה:

נתחיל מהסוף, וננסה לבודד את הגורם $|x - 2|$.

$$\left| \frac{2x+1}{x-3} + 5 \right| = \left| \frac{2x+1+5x-15}{x-3} \right| = \frac{7|x-2|}{|x-3|}$$

כדי להיפטר מהגורם $x - 3$ נחסום אותו.

אם $\delta \leq \frac{1}{2}$, אז $|x - 2| < \delta$ גורר $|x - 2| < \frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2}$ ולכן $-\frac{3}{2} < x - 3 < -\frac{1}{2}$ כלומר $\frac{1}{|x-3|} < 2$ ולכן $-2 < \frac{1}{x-3} < -\frac{2}{3}$

(שימו לב כי לא ניתן לקחת $\delta > 1$, כיוון שאז $x = 3$ מקיים $|x - 2| < \delta$, אבל 3 לא בתחום ההגדרה של הפונקציה).

נחזור לחישוב:

$$\left| \frac{2x+1}{x-3} + 5 \right| = \frac{7|x-2|}{|x-3|} < 14|x-2|$$

נרצה שיתקיים כי $|x - 2| < \epsilon$ ולכן נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{14}$.

הוכחה:

יהי $\epsilon > 0$, נבחר $\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{14}, \frac{1}{2} \right\}$. ואז לכל x המקיים $|x - 2| < \delta$ יתקיים כי:

$$\left| \frac{2x+1}{x-3} + 5 \right| = \left| \frac{2x+1+5x-15}{x-3} \right| = \frac{7|x-2|}{|x-3|} < 14|x-2| < 14 \frac{\epsilon}{14} = \epsilon$$

כדרוש.

(ב) יהי $\epsilon > 0$.

נמצא מספר ממשי $\delta > 0$ שכך שלכל x יתקיים:

$$0 < |x - 1| < \delta \implies \left| \frac{3x+1}{x} - 4 \right| < \epsilon$$

טיטה:

נתחיל מהסוף, וננסה לבדוד את הגורם $|x - 1|$.

$$\left| \frac{3x+1}{x} - 4 \right| = \left| \frac{3x+1-4x}{x} \right| = \left| \frac{1-x}{x} \right| = \frac{|x-1|}{|x|}$$

כדי להיפטר מהגורם x נחסום אותו.

אם $\delta \leq \frac{1}{2}$, אז $|x - 1| < \delta$ גורר $|x - 1| < \frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ כלומר $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 2$ ולכן $\frac{1}{|x|} < 2$
נחזור לחישוב:

$$\left| \frac{3x+1}{x} - 4 \right| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|$$

נרצה שיתקיים כי $2|x - 1| < \epsilon$ ולכן נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

הוכחה:

יהי $\epsilon > 0$, נבחר $\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ ואז לכל x המקיים $|x - 1| < \delta$ יתקיים כי:

$$\left| \frac{3x+1}{x} - 4 \right| = \left| \frac{3x+1-4x}{x} \right| = \left| \frac{1-x}{x} \right| = \frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1| < 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

כדרוש.

2. תהי $f(x)$ פונקציה חסומה, ותהי $g(x)$ פונקציה המקיימת

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$$

שימו לב כי זאת טענה שימושית, ולאחר שתוכיחו אותה, תוכלו להשתמש בה בתרגילים הבאים.

פתרון:

הוכחה:

נתון כי $f(x)$ פונקציה חסומה, כלומר: קיים $M \in \mathbb{R}$, כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $|f(x)| \leq M$ לכן בפרט, $\lim_{0 \neq \Delta x \approx 0}^{st} (f(c + \Delta x))$ הוא מספר ממשי סופי (היכול להיות תלוי בערך של Δx), בנוסף,

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \iff \lim_{0 \neq \Delta x \approx 0}^{st} (g(c + \Delta x)) = 0$$

כלומר $g(c + \Delta x)$ הוא אינפי לכל $0 \neq \Delta x \approx 0$. לכן $f(c + \Delta x)g(c + \Delta x)$ הוא אינפי (אינפי כפול משמעותי) לכל $0 \neq \Delta x \approx 0$. כלומר

$$\lim_{0 \neq \Delta x \approx 0}^{st} (g(c + \Delta x)f(c + \Delta x)) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$$

3. תזכורת:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

הוכיחו כי:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

רמז: לופיטל.

(ב) לכל $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

פתרון:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

כעת,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot -\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

ולכן הגבול המקורי הוא $e^1 = e$ כדרוש.

(ב) ידוע כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, בנוסף לפי סעיף א' $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ כלומר, לכל H אינסופי (חיובי ושילי) מתקיים

$$st \left(\left(1 + \frac{1}{H}\right)^H \right) = e$$

יהי H מספר אינסופי כלשהו, אזי גם $\frac{H}{a}$ מספר אינסופי, ומתקיים לגביו:

$$st \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{H}{a}}\right)^{\frac{H}{a}} \right) = e$$

לכן

$$st \left(\left(1 + \frac{a}{H}\right)^H \right) = st \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{H}{a}}\right)^{\frac{H}{a}} \right)^a = e^a$$

כלומר

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

כדרוש.

4. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \sin x$$

(ג)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x \ln x}$$

(ד)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ה)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

(ו)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+2} \arctan x}{3^x + 4^{x+e}}$$

(ז)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln(x^2)}$$

(ח)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\arcsin x))}{xe^x \cos x}$$

(ט)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$$

פתרון:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

(ב) דרך 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x \cos x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin x}{\cos x} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

דרך 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \sin x}{x} \cdot x = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

כאשר את $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ לפי סעיף א'.

(ג)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x \ln x}$$

לפי סעיף א', $x \ln x \rightarrow 0$ כאשר $x \rightarrow 0^+$, לכן זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x \ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \ln x} = 0$$

(ד) הגבול לא קיים: יהי $0 < \epsilon \approx 0$ נראה כי הגבול תלוי בבחירת ϵ .

עבור $\epsilon = \frac{1}{2\pi N} > 0$ כאשר N היפר-טבעי אינסופי נקבל

$$\cos\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \cos(2\pi N) = 1$$

עבור $\epsilon = \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} > 0$ כאשר N היפר-טבעי אינסופי נקבל

$$\cos\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = \cos\left(2\pi N + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ולכן הגבול לא קיים.

(ה)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}}$$

כעת,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

לכן הגבול המקורי הוא $e^0 = 1$.

(ו)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+2} \arctan x}{3^x + 4^{x+e}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \left(\frac{2}{4}\right)^x \arctan x}{\left(\frac{3}{4}\right)^x + 4^e \left(\frac{4}{4}\right)^x} = \frac{0}{4^e} = 0$$

(ז)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(x^2) \ln(1+x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) \ln(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{\ln(1+x)}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{-1}{\ln^2(1+x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+x) \ln^2(1+x)}{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -2(1+x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -2 \frac{2 \ln(1+x)}{1} = 0$$

(ח)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\arcsin x))}{xe^x \cos x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(\arcsin x)} (-\sin(\arcsin x)) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x \cos x + xe^x \cos x - xe^x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{\cos(\arcsin x) \sqrt{1-x^2}}}{e^x \cos x + xe^x \cos x - xe^x \sin x} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

(ט)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 1\right)\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1}\right)\right)^{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{x^2-1}} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} (e^2)^{\frac{x^2}{x^2-1}} = e^2 \end{aligned}$$

(* לפי 3 ב')

.5 תהי

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(א) מצאו את כל הנקודות בהן f רציפה.(ב) מצאו את $f'(x)$ לכל הנקודות בהן f גזירה.(ג) האם $f'(x)$ רציפה בתחום הגדרתה? אם לא, באילו נקודות היא לא רציפה, ומה סוג אי־הרציפות שם (סליקה/קפיצה/מין שני)?**פתרון:**(א) לכל $x \neq 0$ הפונקציה רציפה כהרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות.עבור $x = 0$ נבדוק האם מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

בגלל רציפות של \sin , $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = \sin^2(0) = 0$. $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ היא פונקציה חסומה, ולכן לפי שאלה 2 לעיל, הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ שווה אפס.כלומר, זה אכן מתקיים, ולכן הפונקציה רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$.(ב) לכל $x \neq 0$ ניתן לגזור לפי הכללים:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin^2 x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

עבור $x = 0$ נבדוק האם הפונקציה גזירה לפי הגדרה.יהי $\Delta x \approx 0 \neq 0$. נחשב

$$st \left(\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \right) = st \left(\frac{\sin^2(\Delta x) \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \right) = st \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) st \left(\sin \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \right) = 1 \cdot 0$$

השיויון האחרון נובע המגבול הידוע $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ומכך שגבול של פונקציה חסומה בפונקציה שואפת לאפס הוא אפס.

לכן, הפונקציה f גזירה גם ב $x = 0$ וערך הנגזרת הוא אפס. לסיכום:

$$f'(x) = \begin{cases} \sin 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin^2 x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(ג) לכל $x \neq 0$ הפונקציה $f'(x)$ רציפה כסכום, מנה, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות. עבור $x = 0$ נבדוק האם מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$$

נחשב גבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin^2 x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

נוכיח כי גבול זה לא קיים: זהו גבול של שני מחוברים:

הגבול של המחובר הראשון קיים

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

כפונקציה חסומה כפול שואפת לאפס.

הגבול של המחובר השני לא קיים:

זוהי מכפלה של גבול קיים

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = -1$$

כפול גבול לא קיים

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

כפי שראינו בתרגיל 4 ד', ולכן גבול המכפלה לא קיים.

לסיכום: זהו חיבור של גבול קיים וגבול לא קיים ולכן הגבול של הסכום לא קיים.

קיבלנו כי הגבול החד צדדי לא קיים ב $x = 0$ ולכן, הפונקציה $f'(x)$ לא רציפה ב $x = 0$ ואי-הרציפות היא מסוג שני.