# תרגיל 8

7 בינואר 2013

## קוסטים וחבורות מנה

1. תהי $G$ סופית חבורה, $H, K$ תתי־חבורות של $G$. נסמן $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. (שימו לב זו לא בהכרח חבורה כי $H, K$ לא בהכרח נורמליות). הכלילו את ההוכחה של משפט איזומורפיזם השני מדף הקודם על מנת לקבל את הנוסחה $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

2. יהי $n$ מספר טבעי, $k \mid n$. נזכיר שחבורה הדיהדרלית $D_n$ היא חבורה שנוצרת על ידי סיבוב $r$, שיקוף $s$ המקיימים את היחסים $r^n = s^2 = e,\ srs = r^{-1}$.

   (א) הראו ש $D_n$ יש תת־חבורה איזומורפית ל $D_k$. (רמז: מצא שיכון של $D_k$ ל $D_n$).

   (ב) נסמן את השיקוף ב $D_n$ על ידי $\tau$, סיבוב ב $\sigma$, סיבוב ב $D_k$ על ידי $r$, סיבוב ב $s$. הראה שפונקציה $\tau^i\sigma^j \mapsto s^i r^j$ היא הומומורפיזם. מצא את הגרעין ($kernel$) שלה.

   (ג) הראו $D_n/\left\langle r^{\frac{n}{k}}\right\rangle \cong D_k$. (רמז: משפט נותר).

   (ד) הראו ש $D_{2n}/Z(D_{2n}) \cong D_n$.

3. הוכח שכל חבורה מסדר $p$ איזומורפית ל $D_p$ או $\mathbb{Z}_{2p}$. (רמז: ניתן פשוט להכליל את ההוכחה עבור מקרה של $p = 3$ שעשינו בכיתה. כמובן שכל דרך אחרת תתקבל בברכה... )

## שיכונים ומשפט קיילי

**תזכורת:** בתרגול ראינו שאם $G$ חבורה, $H \leq G$, $X$ קבוצת קוסטים השמאליים של $G$, אזי קיים הומומורפיזם $\Phi$ מ $G$ ל $S_X$ (אוסף פונקציות חח"ע ועל מ $G$ אל עצמה) שמתאים לכל איבר ב $G$ את הפונקציה $\phi_g : X \mapsto X$, $\phi_g(aH) = gaH$. הראנו ש $ker\Phi = \cap_{x \in G} xHx^{-1}$. ראינו ש $ker\Phi$ תת־חבורה נורמלית מקסימלית של $G$ שמוכלת ב $H$, וש $\Phi$ הוא שיכון של $G$ ב $S_x$ אם ורק אם $H$ אינה מכילה תתי־חבורות נורמליות של $G$ פרט ל $\{e\}$.

1. בעזרת משפט קיילי, מצא שיכון של $D_4$ ב $S_8$. בטאו את האיברים בתמונה כמכפלה של מחזורים.

2. כמו בשאלה הקודמת, עבור $Q_8$ (חבורת הקווטרניונים).

3. מצאו שיכון של $D_4$ ב $S_4$. (אפשר בעזרת אינטרפרטציה גאומטרית של $D_4$ או להשתמש בהכללה של מפשט קיילי מהתרגול).

4. האם קיים שיכון של $Q_8$ ב $S_4$? (רמז: תחשבו על סדר של כל איבר בחבורה...)

5. יהיו $p, q$ מספרים ראשוניים. תהי $G$ חבורה מסדר $pq$. הוכח שאם $G$ יש תת־חבורה נורמלית מסדר $p$, ותת־חבורה נורמלית מסדר $q$, אזי $G$ חבורה ציקלית.

   **הדרכה:**

   (א) הסבירו למה מספיק להוכיח שיש לכל היותר חבורה אחת אחת מכל סדר שמחלק את $pq$.

   (ב) נניח בשלילה שיש יותר מאחת מסדר $p$. אזי יש איבר מסדר $p$ שאינו בחבורה הנורמלית מסדר $p$ מהנתון בשאלה. עברו למנה והגיעו לסתירה...

6. תהי $G$ חבורה מסדר $pq$, כאשר $p$ ו $q$ ראשוניים, $q < p$, $q \nmid p - 1$.

   (א) בעזרת הכללה של משפט קיילי הראה של $G$ קיימת תת־חבורה נורמלית $H$ מסדר $p$. על מנת להראות שחבורה היא נורמלית, הראו שלא קיים שיכון של $G$ ב $S_x$, כאשר $X$ היא קבוצת הקוסטים השמאליים של החבורה הנורמלית מסדר $H$. לכן, לפי המשפט שהזכרנו, קיימת ב $H$ תת־חבורה נורמלית של $G$ ששונה מ $\{e\}$. משיקולי סדר, חבורה זו יכולה להיות רק $H$בעצמה.

(ב) הראו שאם $h^m = e$ עבור $h \in H$ כלשהו, $m \leq p-1$, $m \mid p-1$.

(ג) בעזרת, הראה שלכל הצמדה של של $h \in H$ על ידי $k \notin H$, מתקיים $khk^{-1} = h^m$.

(ד) בעזרת הסעיף הקודמים והנתונים הראה ש $m = 1$.

(ה) הראה ש $G$ ציקלית.

## הצמדה, נוסחת המחלקה ומשפט קושי.

1. בעזרת נוסחת המחלקות הוכח שמרכז כל חבורה מסדר $p^n$ (כאשר $p$ ראשוני) אינו טריוויאלי. (אף על פי שחלק מכם ראו את זה בכיתה... )

2. בעזרת השאלה הקודמת הוכיחו שכל חבורה מסדר $p^2$ (תזכרו במשפט (יותר נכון ההוכחה שלו) שכל חבורה $G$ כך ש $G/Z(G)$ ציקלית, $G$ אבלית).

**תזכורת:**

(א) הראנו שב $S_n$ שתי תמורות צמודות אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים.

(ב) יהי $g \in G$. הגדרנו את המרכז של $g$ ב $G$ , $S_g := \{x \in G : xg = gx\}$. נסמן את מחלקת הצמידות של $g \in G$ על ידי $conj(g)$. מתקיים $|conj(g)||S_g| = |G|$.

3. הראו ישירות ש $K_4$ היא תת־חבורה נורמלית של $S_n$.

4. יהיו $r \leq n$ טבעיים.

(א) הוכח שקיימים $\frac{1}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$ מחזורים שונים באורך $r$.

(ב) בעזרת הסעיף הקודם, חשב את מספר את גודל מחלקת הצמידות של $(1 \dots r)$ ב $S_n$.

(ג) הראה שכל איבר במרכז של $(1 \dots r)$ הוא מן הצורה $\tau\, (1 \dots r)^i$ כאשר $0 \leq i \leq r-1$, ו $\tau$ היא תמורה שקובעת את $1, \dots, r$.

5. תהי $G$ חבורה, $N \leq G$ תת־חבורה נורמלית. הוכח/הפרך: אם $g$ ו $h$ צמודים ב $G$ אזי הם צמודים ב $H$.

6. מצא את כל מחלקות הצמידות של $A_4$.