תרגיל 8

7 בינואר 2013

קוסטים וחבורות מנה

יש לעשות 2 מתוך 3 שאלות.

1. תהי G סופית חבורה, H, K תתי־חבורות של G. נסמן $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. (שימו לב זו לא בהכרח חבורה כי H, K לא בהכרח נורמליות). הכלילו את ההוכחה של משפט איזומורפיזם השני מדף הקודם על מנת לקבל את הנוסחה $|H||K| = |HK||H \cap K|$.

2. יהי n מספר טבעי, $k \mid n$. נזכיר שחבורה הדיהדרלית D_n היא חבורה שנוצרת על ידי סיבוב r, שיקוף s המקיימים את היחסים $r^n = s^2 = e,\ srs = r^{-1}$.

   (א) הראו ש D_n יש תת־חבורה איזומורפית ל D_k. (רמז: מצא שיכון של D_k ל D_n).

   (ב) נסמן את השיקוף ב D_n על ידי τ, סיבוב ב σ, סיבוב ב D_k על ידי r, סיבוב ב s. הראה שפונקציה $\tau^i\sigma^j \mapsto s^i r^j$ היא הומומורפיזם. מצא את הגרעין ($kernel$) שלה.

   (ג) הראו $D_n / \left\langle r^{\frac{n}{k}} \right\rangle \cong D_k$. (רמז: משפט נותר).

   (ד) הראו ש $D_{2n}/Z(D_{2n}) \cong D_n$.

3. הוכח שכל חבורה מסדר $2p$ איזומורפית ל D_p או $\mathbb{Z}_{2p}$. (רמז: ניתן פשוט להכליל את ההוכחה עבור מקרה של $p = 3$ שעשינו בכיתה. כמובן שכל דרך אחרת תתקבל בברכה...)

שיכונים ומשפט קיילי

יש לעשות 2 מתוך 3 שאלות הראשונות, שאלה 4, ושאלה אחת מתוך 5 או 6.

תזכורת: בתרגול ראינו שאם G חבורה, $H \leq G$, X קבוצת קוסטים השמאליים של G, אזי קיים הומומורפיזם Φ מ G ל S_X (אוסף פונקציות חח"ע ועל מ G אל עצמה) שמתאים לכל איבר ב G את הפונקציה $\phi_g : X \mapsto X$, $\phi_g(aH) = gaH$. הראנו ש $ker\Phi = \cap_{x \in G} xHx^{-1}$. ראינו ש $ker\Phi$ תת־חבורה נורמלית מקסימלית של G שמוכלת ב H, וש Φ הוא שיכון של G ב S_x אם ורק אם H אינה מכילה תתי־חבורות נורמליות של G פרט ל $\{e\}$.

1. בעזרת משפט קיילי, מצא שיכון של D_4 ב S_8. בטאו את האיברים בתמונה כמכפלה של מחזורים.

2. כמו בשאלה הקודמת, עבור Q_8 (חבורת הקווטרניונים).

3. מצאו שיכון של D_4 ב S_4. (אפשר בעזרת אינטרפרטציה גאומטרית של D_4 או להשתמש בהכללה של מפשט קיילי מהתרגול).

4. האם קיים שיכון של Q_8 ב S_4? (רמז: תחשבו על סדר של כל איבר בחבורה...)

5. יהיו p, q מספרים ראשוניים. תהי G חבורה מסדר pq. הוכח שאם G יש תת־חבורה נורמלית מסדר p, ותת־חבורה נורמלית מסדר q, אזי G חבורה ציקלית.

   הדרכה:

   (א) הסבירו למה מספיק להוכיח שיש לכל היותר חבורה אחת אחת מכל סדר שמחלק את pq.

   (ב) נניח בשלילה שיש יותר מאחת מסדר p. אזי יש איבר מסדר p שאינו בחבורה הנורמלית מסדר p מהנתון בשאלה. עברו למנה והגיעו לסתירה...

6. תהי G חבורה מסדר pq, כאשר p ו q ראשוניים, $q < p$, $q \nmid p - 1$.

(א) בעזרת הכללה של משפט קיילי הראה של G קיימת תת־חבורה נורמלית H מסדר p. על מנת להראות שחבורה היא נורמלית, הראו שלא קיים שיכון של G ב S_x, כאשר X היא קבוצת הקוסטים השמאליים של החבורה הנורמלית מסדר H. לכן, לפי המשפט שהזכרנו, קיימת ב H תת־חבורה נורמלית של G ששונה מ $\{e\}$. משיקולי סדר, חבורה זו יכולה להיות רק Hבעצמה.

(ב) הראו שאם $h^m = e$ עבור $h \in H$ כלשהו, $m \leq p-1$, $m \mid p-1$.

(ג) בעזרת, הראה שלכל הצמדה של של $h \in H$ על ידי $k \notin H$, מתקיים. $khk^{-1} = h^m$.

(ד) בעזרת הסעיף הקודמים והנתונים הראה ש $m = 1$.

(ה) הראה ש G ציקלית.

הצמדה, נוסחת המחלקה ומשפט קושי.

יש לעשות את השאלות 1, 3 ואחת מתוך 2, 4 ו 5.

1. בעזרת השאלה הקודמת הוכיחו שכל חבורה מסדר p^2 (תזכרו במשפט (יותר נכון ההוכחה שלו) שכל חבורה G כך ש $G/Z(G)$ ציקלית, G אבלית).

תזכורת:

(א) הראנו שב S_n שתי תמורות צמודות אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים.

(ב) יהי $g \in G$. הגדרנו את המרכז של g ב G , $S_g := \{x \in G : xg = gx\}$. נסמן את מחלקת הצמידות של $g \in G$ על ידי $conj(g)$. מתקיים $|conj(g)||S_g| = |G|$.

2. הראו ישירות ש K_4 היא תת־חבורה נורמלית של S_n.

3. יהיו $r \leq n$ טבעיים.

(א) הוכח שקיימים $\frac{1}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$ מחזורים שונים באורך r.

(ב) בעזרת הסעיף הקודם, חשב את מספר את גודל מחלקת הצמידות של $(1 \ldots r)$ ב S_n.

(ג) הראה שכל איבר במרכז של $(1 \ldots r)$ הוא מן הצורה $\tau\,(1 \ldots r)^i$ כאשר $0 \leq i \leq r-1$, ו τ היא תמורה שקובעת את $1, \ldots, r$.

4. תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ תת־חבורה נורמלית. הוכח/הפרך: אם g ו h צמודים ב G אזי הם צמודים ב N.

5. מצא את כל מחלקות הצמידות של A_4.