תרגיל 2

1. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי (X,d). נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x \in X$ ו $n_0 \in \mathbb{N}$, כך ש $x_n = x \; \forall n \geq n_0$.
א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
ב. הוכיחו שבמרחב מטרי עם מטריקת $0-1$ כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.
פתרון:

א. נזכיר כי במרחב מטרי $x_n \to x$ אמ"ם $d(x_n,x) \to 0$.

ובכן, נוכיח שאם $\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x, אז הסדרה מתכנסת לx. אכן, החל ממקום מסויים $d(x_n,x) = d(x,x) = 0$. לכן $d(x_n,x) \to 0$.

ב. במטריקה הדיסקרטית המרחקים הם 0 או 1. לכן אם $d(x_n,x) \to 0$, זה אומר שהחל ממקום מסויים $d(x_n,x) = 0$. כלומר, $x_n = x$.

2. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$ ו $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$.
א. הוכיחו: $p^n \to 0$ במטריקה הp- אדית.
ב. עבור $z \in \mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה לבסוף ששואפת לz במרחב $(\mathbb{Z}, d_3)$.
פתרון:

א. $d_p(p^n,0) = \dfrac{1}{p^n} \to 0$. לכן $p^n \to 0$

ב. $z = 3 \vee z = 3 + 49x \iff z = 3 \vee k(3,z) \geq 2 \iff d(3,z) \leq \dfrac{1}{49} \iff z \in B(3, \dfrac{1}{49})$. כלומר, $B(3,\dfrac{1}{49}) = 3 + 49\mathbb{Z}$

3. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n = (\dfrac{n+1}{n}, \dfrac{n+2}{2n}, \dfrac{n+3}{3n}, ...)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.
פתרון:

נוכיח שהסדרה מתכנסת ל$(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ...)$.

הוכחה: $d_\infty((\dfrac{n+1}{n}, \dfrac{n+2}{2n}, \dfrac{n+3}{3n}, ...), (1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ...)) = \sup(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}, ...) = \dfrac{1}{n} \to 0$.

4. נתבונן במרחב (X,d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, וd היא המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.
א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M,τ) הוא מרחב מטרי ו (Y,τ_Y) תת מרחב

עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\} \subseteq Y$ ו $x \in Y$, $x_n \to x$ לפי τ, אמ"ם $x_n \to x$ לפי τ_Y.

ב. נסתכל על הסדרה $x_n = \dfrac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\} \subseteq X$.

ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X.

פתרון:

א. אם $x_n, x \in Y$, אז $\tau(x_n,x) = \tau_Y(x_n,x)$, מהגדרת המטריקה המושרית. לכן $\tau(x_n,x) \to 0 \iff \tau_Y(x_n,x) \to 0$.

ב. נניח בשלילה שקיים n כך ש $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. כלומר, קיימים $a,b \in \mathbb{Z}$ כך ש $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$. אז $bn+b\sqrt{2} = an-a\sqrt{2} \Longleftarrow (b+a)\sqrt{2} = bn-an \Longleftarrow \sqrt{2} = \frac{bn-an}{b+a} \Longleftarrow b(n+\sqrt{2}) = a(n-\sqrt{2})$. כלומר, $\sqrt{2}$ רציונלי, וזאת כמובן סתירה.

ג. נניח ש $x_n \to x$ ב X. אז $x_n \to x$ גם ב $\mathbb{R}$. אבל ידוע ש $x_n \to 1$ ב$\mathbb{R}$. ו$x \neq 1$, כי $1 \notin X$. בסתירה ליחידות הגבול במרחב מטרי.

5. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.

(א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5} \mid n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{Q}\cap(2021,\infty)$ (המטריקות כאן הן $d(x,y) = |x-y|$)

פתרון. קיים. למשל נגדיר פונקציה לפי

$$f(x) = \sqrt{3} - x + 2021$$

ואז אכן

$$f(\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5}) = \frac{n}{2n+5} + 2021 \in \mathbb{Q} \cap (2021,\infty)$$

בנוסף זה שיכון איזומטרי מפני ש

$$\begin{aligned} |f(\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5}) - f(\sqrt{3} - \frac{m}{2m+5})| &= |\frac{n}{2n+5} + 2021 - (\frac{m}{2m+5} + 2021)| \\ &= |\frac{n}{2n+5} - \frac{m}{2m+5}| \\ &= |\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5} - (\sqrt{3} - \frac{m}{2m+5})| \end{aligned}$$

(ב) $(\mathbb{Z}, d_5) \to (\mathbb{Z}, d_7)$

פתרון. לא קיים. נניח בשלילה שקיים שיכון איזומטרי f.

$$d_5(5,0) = \frac{1}{5}$$

ולכן

$$d_5(f(5), f(0)) = \frac{1}{5}$$

אבל ב $(\mathbb{Z}, d_7)$ אין אף זוג נקודות שהמרחק ביניהם הוא $\frac{1}{5}$ (מרחקים הם 0 או $\frac{1}{7^k}$). סתירה.

6. יהי (X, d) מרחב מטרי.

(א) הוכיחו כי לכל $x \in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

פתרון. נוכיח כי המשלים קבוצה פתוחה. יהי $y \neq x$ צריך להוכיח שיש $r > 0$ כך ש $x \notin B(y, r)$. אז אפשר לקחת $r = \frac{d(x,y)}{2}$.

(ב) הוכיחו שסעיף א' נכשל אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

פתרון. אם X הוא פסאודו מטריקה שאינה מטריקה, אז יש $a \neq b \in X$ כך ש $d(a, b) = 0$. הקבוצה $\{a\}$ אינה סגורה, כי $\{a\}^c$ אינה פתוחה, כי כל כדור סביב $b \in \{a\}^c$ מכיל את a.

(ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

פתרון. מיידי כי כל נקודה היא קבוצה סגורה ואיחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות היא גם קבוצה סגורה.

7. הוכיחו שבמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0, r)$ הוא קבוצה סגוחה (כלומר, גם סגורה וגם פתוחה) ותת חבורה.

פתרון. ברור שזו קבוצה פתוחה (כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה). נוכיח שזו גם קבוצה סגורה. אם $r \geq 1$ אז הכדור הזה הוא כל $\mathbb{Z}$ וזו בוודאי קבוצה סגורה ותת חבורה. אחרת קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\frac{1}{p^{m+1}} \leq r < \frac{1}{p^m}$$

נבחר t כך ש

$$r < t < \frac{1}{p^m}$$

ואז קל לבדוק ש

$$B(0, r) = B[0, t]$$

(כי אין 2 נקודות שהמרחק שלהן ממש בין $\frac{1}{p^m}$ ו $\frac{1}{p^{m+1}}$ - אם המרחק של x מ 0 קטן שווה t הוא יהיה קטן שווה $\frac{1}{p^{m+1}}$ ולכן קטן מ r) ולכן $B(0, r)$ גם קבוצה סגורה כי זה גם כדור סגור.

נותר להוכיח שזו תת חבורה. אבל אם $x, y \in B(0, r)$ זה אומר ש

$$\frac{1}{p^{k(0,x)}} < r, \quad \frac{1}{p^{k(0,y)}} < r$$

כאשר כזכור $k(a,b)$ היא החזקה הגבוה ביותר α שעבורה $p^\alpha \mid a-b$. עכשיו נשים לב ש

$$k(0,x+y) \geq \min\{k(0,x),k(0,y)\}$$

כי אם $p^\alpha \mid x$ ו $p^\alpha \mid y$ אז $p^\alpha \mid x+y$ ולכן

$$\frac{1}{p^{k(0,x+y)}} < r$$

כלומר

$$x+y \in B(0,r)$$

כנדרש.

8. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל $\mathbb{R}$. המטריקה היא $d(a_n,b_n)=\frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

(א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ או ב $3,4,5,6$ היא קבוצה פתוחה.

פתרון. נשים לב שקבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ היא הכדור הפתוח שמרכזו ב $0,1,2,0,0,0,0,\ldots$ ורדיוסו $\frac{1}{3}$ כי ההבדל בין הסדרות יכול להתחיל באיבר הרביעי ולכן המרחק הוא לכל היותר $\frac{1}{4}$.

בדומה הסדרות שמתחילות ב $3,4,5,6$זה כדור פתוח עם רדיוס $\frac{1}{4}$. איחודן הוא עדיין פתוח.

הערה: למעשה קל לבדוק שזוהי קבוצה סגוחה.

(ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.

פתרון. נוכיח שמשילמתה פתוחה. תהי a_n סדרה לא קבועה. כלומר קיימים $a_i \neq a_j$. בלי הגבלת כלליות $i<j$. אז קבוצת כל הסדרות שמתחילות ב

$$a_1,\ldots,a_j$$

היא כדור פתוח (כמו בסעיף הקודם). וכדור זה כמובן לא מכיל אף סדרה קבוצה. זה מה שרצינו.

9. הוכיחו/הפריכו: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל, אז $(\mathbb{R},d_f)$ הוא מרחב שלם, כאשר $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$

הוכחה:

$\{x_n\}$ סדרת קושי אמ"ם $\forall\epsilon\exists N:\forall n,m>N, d(x_n,x_m)=|f(x_m)-f(x_n)|\to 0$

כלומר, הסדרה $\{f(x_n)\}$ היא סדרת קושי במטריקה הרגילה של $\mathbb{R}$. לכן יש לה גבול. $f(x_n)\to a$. מכיוון שf חח"ע ועל יש לa מקור יחיד x. נקבל ש: $d(x_n,x)=|f(x_n)-a|\to 0$ ולכן $x_n \to x$. כלומר, הסדרה מתכנסת.

10. הוכיחו/ הפריכו: המרחבים הבאים שלמים:

(א) מרחב כל הסדרות הממשיות המתאפסות לבסוף, עם מטריקת הסופרימום.
הפרכה:
נסתכל על הסדרה: $(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0.0.0...)$
(שימו לב, זוהי סדרה של סדרות. לכל n מקבלים איבר אחר בסדרה, שהוא בפני עצמו סדרה מתאפסת לבסוף)

נטען שמרחב כל הסדרות החסומות, הסדרה הזאת מתכנסת לאיבר: $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$

כלומר, x שווה לסדרה הממשית $(\frac{1}{i})$

הוכחת הטענה: $d(x_n, x) = \frac{1}{n+1} \to 0$

קיבלנו שהסדרה הנ״ל מתכנסת במרחב יותר גדול, ולכן היא סדרת קושי, אבל היא לא מתכנסת במרחב שלנו, כי הגבול שלה לא שייך למרחב (הוא לא מתאפס לבסוף).

כלומר, מצאנו סדרת קושי לא מתכנסת.

(ב) $\mathbb{R}^N$ עם המטריקה: $d((x_1, ..., x_N), (y_1, ..., y_N)) = \max_i |x_i - y_i|$
הוכחה: תהא $\{x^n\}$סדרת קושי. יהא $\epsilon > 0$ נתון. בגלל שזוהי סדרת קושי קיים n_0 כך ש

$$\forall n, m \geq n_0 : d_{\max}(x^n, x^m) \leq \epsilon$$

ולכן בכל קורדינאטה i מתקיים

$$\forall n, m \geq n_0 :\ |x_i^n - x_i^m| \leq \max_k |x_k^n - x_k^m| = d_{\max}(x^n, x^m) \leq$$

ולכן בכל קורינאטה נקבל סדרת קושי$\{x_i^n\}_n$ ב $\mathbb{R}$ ולכן קיים הגבול $\lim_n x_i^n = a_i$.
נגדיר $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ ונראה שזה הגבול של הסדרה שלנו. לכל i קיים $n_{0,i}$ כך ש

$$\forall n \geq n_i :\ |x_i^n - a_i| \leq \epsilon$$

ולכן עבור $N_0 = \max_i \{n_i\}$ נקבל כי

$$\forall n \geq N_0 :\ d_{\max}(x^n, a) = \max_k |x_k^n - a_k| \leq \epsilon$$

וקיבלנו כי $x^n \xrightarrow{d_{\max}} a$