תרגיל בית 11 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום). מבלי לעשות אף פעולת חיבור או כפל, הסבירו למה הקבוצה הבאה ב-$\mathbb{Z}_2^4$ אינה קוד לינארי:

$$\{(0110),(1001),(1010),(1100)\}$$

שאלה 2. נקודד את $\mathbb{Z}_2^2$ לקוד ל-$\mathbb{Z}_2^8$ לפי

$$\begin{array}{ll} (01)\mapsto(01010101) & (00)\mapsto(00000000) \\ (11)\mapsto(11111111) & (10)\mapsto(10101010) \end{array}$$

כלומר חזרנו ארבע פעמים על כל וקטור. קוד מסוג כזה נקרא קוד חזרה.

א. מצאו את המרחק המינימלי d של הקוד.

ב. מצאו את המטריצה היוצרת התקנית G ואת מטריצת בדיקת הזוגיות הקנונית H של הקוד. ודאו קודם שאתם יודעים למה זה בכלל קוד לינארי.

שאלה 3. יהיו $C_1,C_2\subseteq\mathbb{Z}_2^n$ שני קודים עם מרחקים מינימליים d_1,d_2, בהתאמה.

א. מצאו דוגמה שבה $|C_1|=|C_2|$, אבל $d_2<d_1$.

ב. הוכיחו שאם $C_1\subseteq C_2$, אז $d_2\le d_1$.

שאלה 4. נתבונן במטריצה הבאה

$$H=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

א. חשבו את d של הקוד הלינארי C שמגדיר מרחב האפסים של H.

ב. בדקו האם המילים הבאות הן מילות קוד של C, ואם לא הניחו שאירעה שגיאה אחת ותקנו אותה:

$$v_1=(0110100)\quad v_2=(1000100)\quad v_3=(1011100)\quad v_4=(1010111)$$

שאלה 5. לכל זוג פולינומים $f(x),g(x)$ בצעו חלוקה אוקלידית של פולינומים ומצאו פולינומים $q(x),r(x)$ כך ש-$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ עם $r(x)<\ g(x)$.

א. $f(x)=x^4+3x^3+3x^2+3x+2,\ g(x)=x^2+x-5$ בחוג $\mathbb{R}[x]$.

ב. $f(x)=x^4+3x^3+3x^2+3x+2,\ g(x)=x^2+x-5$ בחוג $\mathbb{Z}_2[x]$.

שאלה 6. יהי $g(x) = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. נגדיר לפי $g(x)$ קוד פולינומי C מ-$\mathbb{Z}_2^6$ ל-$\mathbb{Z}_2^9$ (כלומר כאן $m = 3$, $k = 6$ ו-$n = 9$).

א. הוכיחו או הפריכו האם C הוא קוד ציקלי.

ב. קודדו את הוקטור $x = (101011)$ למילת קוד ב-C.

ג. בדקו מי מבין המילים הבאות היא מילת קוד של C:

$$v_1 = (101011110) \qquad v_2 = (000101101) \qquad v_3 = (110010110)$$

בהצלחה!