תרגול חזרה בפיזיקה

מתרגל: ניר שרייבר

9 ביולי 2015

מעלה על הלטך: ניר (שורץ)

על המבחן

- תיתכן שאלה מתרגילי בית 7-8 במבחן.
- אפשר להביא 15 דפים.
- המבחן הוגן, פתיר (שלום שלום המשפט על מיון של חבורות פתירות!)
- הבונוס לא על יחסות אלא דומה לשאלות הבונוס מהמאגרים והמבחנים.

שאלה 5 ממאגר התרגילים

המצבים העצמיים של חלקיק קוונטי נתונים ע"י $|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$. אופרטור המיקום הוא x ואופרטור התנע הוא $P_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. מצב החלקיק ברגע מסוים הוא $|\psi\rangle = ie^{-\frac{|x|}{2}}$.

1. חשבו את תוחלת המקום של החלקיק $\langle x\rangle$. מהי צפיפות ההסתברות $P\left(x\leq x_0\right)$? ונניח $x_0\geq 0$.
2. רשמו את $\langle p_x\rangle$.
3. הראו כי $|\psi_k\rangle$ מצב עצמי של אופרטור התנע. מהו הע"ע המתאים?

פתרון:

.1

$$\langle\psi\mid\psi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}dx=2\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=2$$

$$|\psi\rangle=\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{|x|}{2}}$$

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(x\right)x\psi\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}-ie^{-|x|/2}xie^{-|x|/2}dx=\frac{1}{2}\int e^{-|x|}dx=0$$

לא להתבלבל עם פונקציית הגמא [קשור לסע' ב' שכן הוכחנו תוחלת של פונקצית גל היא 0 אם...]!

$$\begin{aligned} P\left(x\leq x_0\right) &= \int_{-\infty}^{x_0}\left|\psi\left(x\right)\right|^2dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0}e^{-|x|}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\int_{0}^{x_0}e^{-x}dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1-e^{-x_0}+1\right]=1-\frac{1}{2}e^{-x_0} \end{aligned}$$

ניתן לבדוק שבגבול $x_0\to\infty$ מוביל לכך שאכן מקבלים הסתברות 1 שהחלקיק נמצא במקום מסוים במערכת.

.2

$$\begin{aligned} \langle p_x\rangle &= \frac{-i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{|x|}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-|x|/2}\right)dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|/2}\frac{\partial}{\partial x}e^{-|x|/2}dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{x/2}\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{x}{2}}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-x/2}\frac{\partial}{\partial x}e^{-x/2}dx\right] \\ &= -i\frac{\hbar}{2}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx\right]=0 \end{aligned}$$

דרך ב': נעשה את החישוב בהצגת התנע :

$$\begin{aligned} \psi\left(k\right) &= \langle k\mid\psi\rangle=\int dx\,\langle k\mid x\rangle\,\langle x\mid\psi\rangle \\ 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\mid x\rangle\langle x\mid=\int_{-\infty}^{\infty}dx\underbrace{\langle k\mid x\rangle\cdot\psi\left(x\right)}_{\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\psi(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-|x|/2}dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{-\left(ik-\frac{1}{2}\right)x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-\left(ik+\frac{1}{2}\right)x}dx\right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{2}-ik}-\frac{-1}{\frac{1}{2}+ik}\right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\frac{1}{4}+k^2} \\ &= \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+4k^2} \end{aligned}$$

ננרמל את $\psi\left(k\right)$:

$$\langle\psi\left(k\right)\mid\psi\left(k\right)\rangle=\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\left(1+4k^2\right)^2}=1$$

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle_x &= \int \psi\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dx \\
\langle p\rangle_k &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\,k\psi(x)\,dk = \frac{\pi}{4} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{k}{\left(1+4k^2\right)^2}dk = 0
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
p \quad | \quad \psi_k\rangle &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right) \\
&= \hbar k\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right) = \hbar k \mid \psi_k\rangle
\end{aligned}$$

ולכן $\hbar k$ הע"ע.

4. מה ההסתברות $P\left(p_x \le p_0\right)$? נסמן $k_0 := \frac{p_0}{\hbar}$ ואז:

$$P\left(p_x \le p_0\right) = \int_{-\infty}^{k_0}\left|\psi(k)\right|^2 dk = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{k_0}\frac{dk}{\left(1+4k^2\right)^2} = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{2k_0}{1+4k_0^2}+\arctan\left(2k_0\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

ושוב בגבול מקבלים 1 וזה מוכיח שאכן יש צדק בעולם והחישוב נכון!

שאלה 7 ממאגר השאלות

שתי מטוטלות בשדה כבידה g מצומדות ע"י קפיץ עם קבוע k (ראו שרטוט). במצב מנוחה, כאשר שתי הזוויות מקיימות $\theta_1 = \theta_2 = 0$. הקפיץ רפוי באורך L.

1. רשמו את ה$\mathcal{L}$ במונחים של הקואורדינטות θ_1, θ_2. בקירוב זוויות קטנות.
2. קבלו את משוואות $Euler - Lagrange$.
3. הגדירו $w = \theta_1 + \theta_2$ ו$q = \theta_2 - \theta_1$ ופיתרו את המשוואות עבור w, q.
4. בזמן $t = 0$ המערכת במנוחה במצב $\theta_1(0) = \theta_0, \theta_2(0) = 0$. קבלו את θ_1, θ_2 כפו' של t.

[דמיינו את שרטוט הבעיה]

פתרון

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\ell^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right) \\
V &= V_{gravity} + V_s
\end{aligned}$$

אגב:

$$v^2 = \underbrace{\dot{r}^2}_{=0} + r^2\dot{\theta}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$$

ובחזרה לתרגיל:

$$V_g = -mg\ell\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) \approx -2mg\ell$$

$$V_s = \frac{1}{2}k\left(\vec{x} - \vec{x_0}\right)^2$$

נזכר בכך ש:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \ell\left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right) \\ \Delta y &= \ell\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \end{aligned}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{1}{2}k\ell^2\left[\left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right)^2 + \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)^2\right] \\ &\approx \frac{k\ell^2}{2}\left(\theta_1 + \theta_2\right)^2 \end{aligned}$$