

11-12-88-112 תירגול

תמורות:

תמורה: תהא X קב' סופית. תמורה σ על X היא פונקציה חח"ע ועל מ- X לעצמה. את אוסף התמורות מסמנים S_X או S_n עבור $|X| = n$ וניתן להראות ביתר קלות כי $|S_n| = n!$

$$\begin{pmatrix} 1 & \rightarrow & n - \text{options} \\ 2 & \rightarrow & n - 1 - \text{options} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \rightarrow & \text{one option} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ צורת כתיבה:}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ לדוגמא: אם } 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3 \text{ אז:}$$

סוגי תמורות:

מחזור: היא תמורה הפועלת על תת קבוצת אייברים ב- X באופן מעגלי ואיננה מזיזה את היתר, ניתן לכתוב אותה כ- $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k)$ כאשר $a_1 \mapsto a_2 \mapsto \dots \mapsto a_k \mapsto a_1$. דוגמא:

$$\text{את } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ממקודם ניתן לכתוב כ- } (1 \ 2).$$

חילוף: הוא מחזור של שני אייברים בלבד.

הרכבת תמורות: כמקרה פרטי של פונקציה נגדיר הרכבת תמורות ע"י $\tau \circ \sigma(i) = \tau(\sigma(i))$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ לדוגמא:}$$

פרוק תמורה למחזורים זרים ולחילופים:

במבט על תמורה $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ניתן לפרק את הקב' X לתתי קבוצות זרות ע"י

המחזורים הפועלים ב σ (שימו לב שסדר ההרכבה בפרוק זה ניתן להחלפה) וכמו כן ניתן להגדיר את σ כרצף של חילופים (לא בהכרח זרים).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 5 \ 6 \ 2)(3 \ 4) = (5 \ 6)(6 \ 2)(2 \ 1)(3 \ 4) \text{ דוגמא:}$$

הערה: בכתיבה המחזורית נהוג להשמיט את המחזורים מאורך 1.

תמורת הזהות: היא התמורה

$$Id \in S_n : \forall a_i \in X \quad a_i \mapsto a_i \Rightarrow Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1)(2)\dots(n)$$

תמורה הפוכה: לתמורה כלשהי σ היא התמורה $\tau = \sigma^{-1}$ כך ש- $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = Id$
 דוגמא: $\sigma = (1 \ 2 \ 3) \in S_4$ מצא $\tau = \sigma^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

בפועל, על מנת למצוא את האיבר ההופכי של מחזור כלשהו, יש להפוך את סדר האיברים במחזור.
 כך למשל, ההופכי של (1432) הוא (2341)

ע"מ 1.6, 68 א:

יהי V מ"ו עם בסיס סדור $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. עבור תמורה $\sigma \in S_n$ נסמן

$$B_\sigma = \{v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}$$

יהי $v \in V$. הוכח

$$[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Leftrightarrow [v]_{B_\sigma} = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$$

פתרון:

ראשית נשים לב כי מהעובדה שתמורה היא פונקציה חח"ע ועל מ- V לעצמה נובע כי:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \exists! i = 1, \dots, n : \sigma(i) = j$$

לכן:

$$[v]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Leftrightarrow v = \sum \alpha_j v_j \Leftrightarrow v = \sum \alpha_{\sigma(i)} v_{\sigma(i)} \Leftrightarrow [v]_{B_\sigma} = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$$

ע"מ 1.9, 68 (לא חובה, בהתאם לזמן):

תהא $\sigma \in S_n$. נגדיר העתקה $T_\sigma : F^n \rightarrow F^n$ ע"י $T_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$

א. הוכח T_σ ה"ל

ב. מצא $[T_\sigma]$

פתרון:

א.

$$T_\sigma((x_1, \dots, x_n) + k(y_1, \dots, y_n)) \underset{z_i = x_i + ky_i}{=} T_\sigma(z_1, \dots, z_n) =$$

$$(z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)}) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) + k(y_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(n)}) =$$

$$T_\sigma(x_1, \dots, x_n) + kT_\sigma(y_1, \dots, y_n)$$

ב. $[T_\sigma] = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \cdots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & e_{\sigma^{-1}(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$.
 שורה בלבד ביחס למטריצת היחידה.

היפוך סדר: בתמורה הוא זוג $i, j \in \{1, \dots, n\}$ כך ש $i < j$ וגם $\sigma(i) > \sigma(j)$.

סימן של תמורה: $sign \sigma = (-1)^{n(\sigma)}$ כאשר $n(\sigma)$ הוא מס' היפוכי סדר ב- σ .

זוגיות של תמורה: תמורה σ היא זוגית אם מס' הסימן שלה הוא 1 ולכן אי זוגית אם מס' הסימן שלה הוא -1.

שיטה נוספת לגילוי הסימן/זוגיות: נרשום את התמורה כפרוק לחילופים ונקבע את זוגיותה בהתאם לזוגיות מס' החילופים. (שימו לב, קל יותר קודם לפרק למחזורים זרים ואז לחילופים).

דוגמא: א"י $\Rightarrow sign \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = sign(1 \ 2)(3 \ 5 \ 4) = (1 \ 2)(4 \ 5)(3 \ 4)$

תכונות חשובות:

1. סימן של מחזור מאורך k הוא $(-1)^{k-1}$.
2. סימן של תמורה הוא מכפלת סימני מחזוריה הזרים.
3. סימן של הרכבת תמורות הוא מכפלת סימני מרכיביה.

דטרמיננטות:

תהי $A \in F^{n \times n}$. כל תמורה $\sigma \in S_n$ היא בחירת n מקומות ב-A: $a_{1, \sigma(1)}, \dots, a_{n, \sigma(n)}$ (כלומר רכיב בודד לכל שורה ועמודה).

לדוגמא: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \underline{a_{23}} \\ a_{31} & \underline{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$

דטרמיננטה: $A \in F^{n \times n}$. אזי: $\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

דוגמא:

$S_2 = \{Id, (1 \ 2)\}$

↓ ↓

א"י זוגית

1. $A = (a_{ij}) \in F^{2 \times 2}$. ראשית נבין מי הם איברי S_2 וסימניהם:

ולכן: $|A| = \sum_{\sigma \in S_2} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

2. $A = (a_{ij}) \in F^{3 \times 3}$. ראשית נבין מי הם איברי S_3 וסימניהם:

$$S_3 = \{Id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 זוגית זוגית זוגית זוגית זוגית זוגית

ולכן:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

נשים לב ש-

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{13}(-a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}) =$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ודטרמיננטות 2×2 אנו יודעים לחשב ביתר קלות.

מסקנה: פיתוח דטרמיננטות לפי מינורים.

$A \in F^{n \times n}$. המינור ה- ij של A הוא התת מטריצה M_{ij} מגודל $(n-1) \times (n-1)$ המתקבלת ע"י

מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j ב- A .
לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

הגדרת הדטרמיננטה בפיתוח לפי שורה/עמודה:

פיתוח לפי השורה ה- i :

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

פיתוח לפי העמודה ה- j :

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{vmatrix} = a_{ij} a_{kl} - a_{il} a_{kj} \quad 2 \times 2$$

זוהי בניה רקורסיבית עם הבסיס 2×2 .

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -1 - 32 - 0(-3+0) + 2(24-0) = 15$$

מסקנה: יהיה הכי קל לפתח לפי שורה/עמודה בעלת הכי הרבה אפסים.

משפט: המטריצה A הפיכה אם"מ הדטרמיננטה שלה מתאפסת.

ע"מ 2.6, 70

בדוק איזו מהמטריצות הבאות הפיכה כאשר $a, b \in \mathbb{R}$

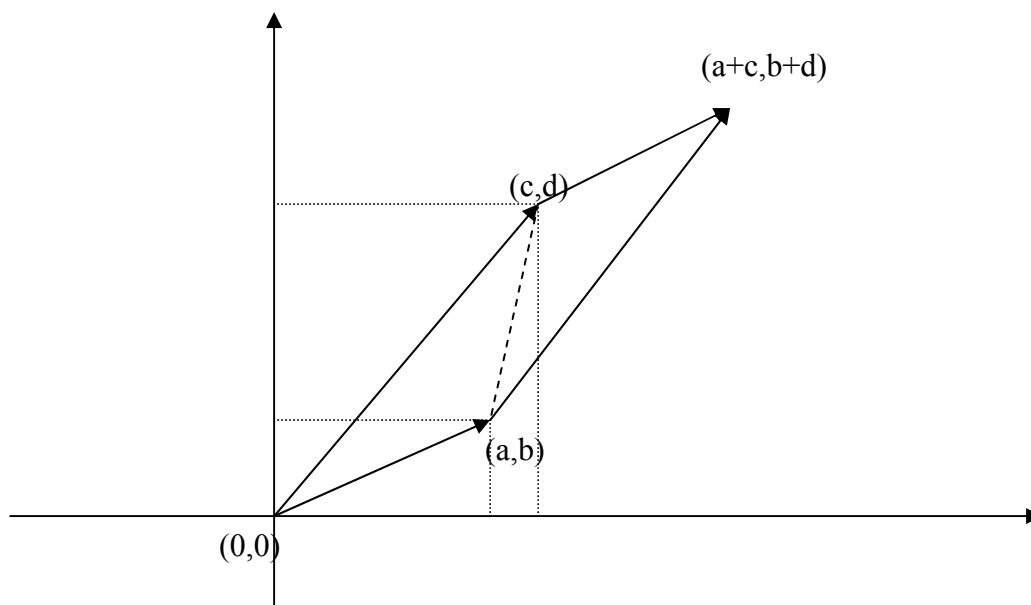
$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0 \Rightarrow \text{לא}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

אז B תהיה הפיכה כאשר a או b שונות מאפס.

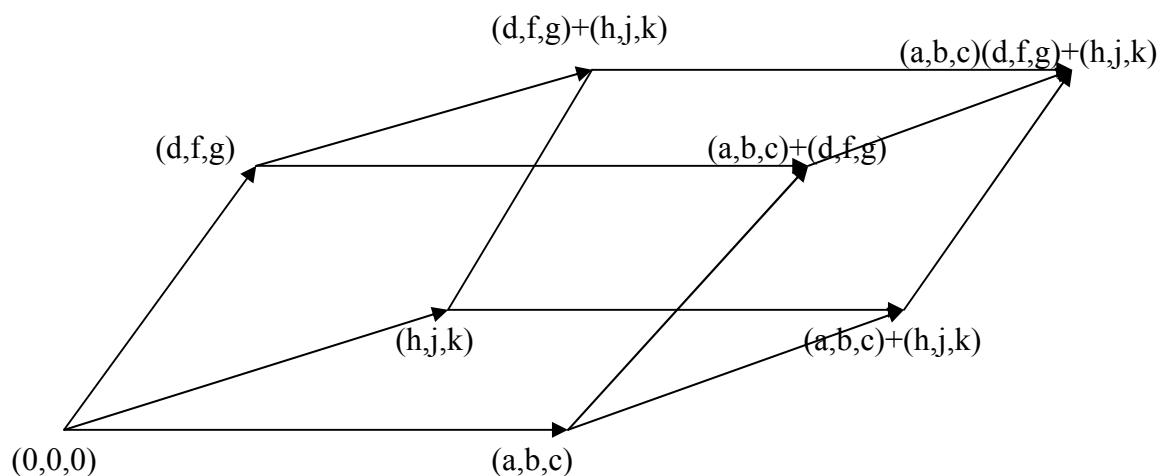
ע"מ 2.8, 70

איך מחשבים שטח של מקבילית במישור בעזרת דטרמיננטות?



$$S = 2 \cdot \left(\frac{cd}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{(b+d)(c-a)}{2} \right) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow \text{הוקטורים הבונים של המקבילית}$$

באותו אופן:



$$S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & j & k \end{vmatrix}$$

תכונות חשובות:

1. אם ב-A שורה/עמודה אפסים אז $\det(A)=0$
2. אם A משולשית (ובפרט אלכסונית) אז $\det(A) = \prod a_{ii}$
3. אם A מטריצת בלוקים משולשית אז $\det(A) = \prod A_{ii}$ (כמוכח ש A_{ij} הם הבלוקים).
4. דטרמיננטה היא פונקציה כיפלית $|AB| = |A||B|$, בפרט חזקתית $|A^m| = |A|^m$ ובפרט (אם המטריצה הפיכה) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
5. חשוב לציין שפעולות שורה/עמודה משפיעות על הדטרמיננטה, כלומר למטריצות שקולות שורה לאו דווקא תהיה אותה הדטרמיננטה!

אם נסמן את המטריצות האלמנטריות $E_{i,j}, E_{\alpha \cdot i}, E_{i+\alpha \cdot j}$ כפי שעשינו בעבר אז:

$$|E_{i,j}A| = -|A|$$

$$|E_{\alpha \cdot j}A| = \alpha |A|$$

$$|E_{i+\alpha \cdot j}A| = |A|$$

$$|\alpha A| = \alpha^n |A| \quad \text{מ-5: כתוצאה}$$

$$|A| = |A^t| \quad .7$$

דוגמאות:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -14 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3)$$

3. יהיו B, A מטריצות כך שידוע $|A| = 2$. חשב $|B^{-1}AB|$, $|(B^{-1}AB)^9|$, $|(A^{-1})^t|$.

$$|B^{-1}AB| = |B^{-1}| |A| |B| = |B^{-1}| |A| |B| = |A|,$$

$$|(B^{-1}AB)^9| = |B^{-1}AB|^9 = (|B^{-1}| |A| |B|)^9 = |A|^9,$$

$$|(A^{-1})^t| = |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

ע"מ 72.2.15:

א. הוכח את תכונה 6

ב. הוכח לכל A מעל C עם דט' שונה מאפס קיים c ב-C כך ש- $|cA| = 1$

פתרון:

א. לא רצוי לבזבז על זה הרבה זמן, זה נובע מהתכונה השניה ב-5 שחוזרת n פעמים, פעם לכל שורה.

$$|A| = b \Rightarrow \frac{1}{b}|A| = 1 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{\frac{1}{b}} A \right| = 1 \Rightarrow c = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} \quad \text{ב.}$$

↓

תמיד קיים לפי המשפט היסודי של האלגברה

ע"מ 4.3, 75:

$A \in R^{n \times n}$ כך שלכל i, j $a_{i,j} = \pm 1$. הוכח $2^{n-1} | \det(A) |$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & \pm 4,0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & \dots & \pm 4,0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & \pm 4,0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pm 2^{n-1},0 \end{pmatrix}$$

↓

מכפלת איברי האלכסון.

(וודאי שאפשר גם באינדוקציה, שזה למעשה ה"שלוש נקודות", נראה לי שיותר חשוב להראות את הפיתוח)

תרגיל:

$$.17 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

המספרים 204, 527, 255 מתחלקים ב-17. הראה כי

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{R_3+100R_1 \\ R_3+10R_2}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 204 & 527 & 255 \end{vmatrix} = 204 \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + 527 \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + 255 \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ע"מ 5.8, 75:

$A \in F^{n \times n}$ מקיימת $AA^t = I$. מהם ערכי הדטרמיננטה האפשריים של A ?

פתרון:

$$1 = |I| = |AA^t| = |A||A^t| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

ע"מ 5.9, 75:

$A \in F^{n \times n}$ מקיימת $A^k = I$. מהם ערכי הדטרמיננטה האפשריים של A מעל R ומעל C ?

$$|A| = \begin{cases} \pm 1, & R \text{ מעל} \\ e^{2\pi i k}, & C \text{ מעל} \end{cases}$$

תרגיל

(א) תהי A מטריצה ממשית והפיכה המקיימת $A^4 + 2A = 0$. חשב את $|A|$.

(ב) הוכח שאם קיימים סקלרים a_1, a_2, \dots, a_k שמתקיים $I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k = 0$ אז המטריצה A היא הפיכה.

(ג) תהיינה A, B מטריצות $n \times n$ כאשר n מספר אי זוגי. נתון שמתקיים $AB + BA = 0$. הוכח שלפחות אחת המטריצות A או B היא לא הפיכה.

פתרון:

(א)

$$\begin{aligned} A^4 + 2A = 0 &\Rightarrow A^4 = -2A \Rightarrow \det(A^4) = \det(-2A) \Rightarrow (\det A)^4 = (-2)^n \cdot \det A \\ &\Rightarrow (\det A)^4 - (-2)^n \det A = 0 \\ &\Rightarrow \det A \cdot [(\det A)^3 - (-2)^n] = 0 \end{aligned}$$

מהנתונים שבנוסח השאלה נתון כי A מטריצה ממשית והפיכה כלומר $\det(A) \neq 0$ ולכן יוצא

$$(\det A)^3 = (-2)^n \Rightarrow \det A = (-2)^{\frac{n}{3}}$$

(ב) $I = -a_1A - a_2A^2 - \dots - a_kA^k \Rightarrow I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k = 0$ כלומר $A^{-1} = -a_1I - a_2A^1 - \dots - a_kA^{k-1} \Rightarrow I = A(-a_1I - a_2A^1 - \dots - a_kA^{k-1})$

(ג)

$$AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA \Rightarrow \det(AB) = \det(-BA) \Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = (-1)^{2k+1} \cdot \det(B) \cdot \det(A)$$

כלומר מתקיים: $2 \cdot \det(A) \cdot \det(B) = 0$ כלומר $\det(A) = 0$ או $\det(B) = 0$ כלומר לפחות אחת מהמטריצות איננה הפיכה.

דטרמיננטת העתקות לנאריות:

V מ"מ, B בסיס ל- V , $T: V \rightarrow V$ ה"ל. דט' T מוגדרת ע"י: $|T| = [T_B]$ ואיננה תלויה בבחירת הבסיס.

ע"מ 8.1, 77, ב.ג.

$T, S: V \rightarrow V$ ה"ל. הוכח:

ב. T הפיכה אמ"מ הדט' שלה שונה מ-0 (או: T איננה הפיכה אמ"מ הדט' שלה שווה-0)

ג. $\det(ST) = \det S \det T$

פתרון:

ב. T איננה הפיכה אמ"מ הגרעין שלה שונה מאפס אמ"מ קיים וקטור v שונה מאפס כך ש- $Tv=0$ (נרחיב את v לבסיס B) אמ"מ ב- $[T]_B$ קיימת שורת אפסים אמ"מ דט' T היא אפס.

$$|S||T| = |[S]_B| |[T]_B| = |[S]_B [T]_B| = |[S \circ T]_B| = |S \circ T| \quad \text{ג.}$$

המטריצה המצורפת/הנלוית (adjoint):

תהי $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ אז $adj(A) = (b_{ij}) = ((-1)^{i+j} |M_{ji}|)$

טענה: 1. $(\det A) \cdot I = A \cdot adj A$

2. אם A הפיכה אז: $A^{-1} = \frac{adj A}{\det A}$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצא: $adj A, \det A, A^{-1}$

פתרון:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 8 \\ -10 & 1 & -5 \\ 29 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3$$

↓

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \text{adj}A$$

ע"מ 9.577:

$$.A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3}$$

א. חשב את $\text{adj}(A)$.

ב. הראה בעזרת (א), ש $|A| = b - a$,

פתרון:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & a^2 - ab & a^2 - ab \\ a^2 - ab & b^2 - a^2 & a^2 - ab \\ a^2 - ab & a^2 - ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-a)(b+a) & a(a-b) & a(a-b) \\ a(a-b) & (b-a)(b+a) & a(a-b) \\ a(a-b) & a(a-b) & (b-a)(b+a) \end{pmatrix} =$$

$$(a-b) \begin{pmatrix} -(b+a) & a & a \\ a & -(b+a) & a \\ a & a & -(b+a) \end{pmatrix}$$

$$\det A \cdot I = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix} (a-b) \begin{pmatrix} -(b+a) & a & a \\ a & -(b+a) & a \\ a & a & -(b+a) \end{pmatrix} =$$

$$(a-b) \begin{pmatrix} -b(b+a) + 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b(b+a) + 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -b(b+a) + 2a^2 \end{pmatrix} \downarrow = (b-a)I$$

$$(a-b)(-b(b+a) + 2a^2) = b^3 - a^2b + 2a^3 - 2ba^2 = b + 2a = b - a$$

תרגיל: הוכח $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

פתרון:

ידוע:

$$|A|I = Aadj(A)$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 : |A|I = |Aadj(A)| \Rightarrow |A|^n = |A|adj(A) \Rightarrow |A|^{n-1} = adj(A)$$

$$\nexists A^{-1} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow |A^{n-1}| = 0 : |A|I = |Aadj(A)| \Rightarrow 0 = |A|adj(A) = 0$$

משפט קרמר:

נתונה מערכת משוואות $Ax=b$ עבור מטריצה ריבועית A מסדר n אשר הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת. אזי אוסף הפתרונות x_1, \dots, x_n של המערכת מקיימים $x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \forall i = 1, \dots, n$ כאשר A_i מתקבלת ע"י מחיקת העמודה ה- i ב- A והצבת b במקומה.

דוגמא:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow y = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow z = 2$$

ע"מ 10.3 79:

$$\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ x - y + 5z - w = 5 \end{cases} \text{ פתור בעזרת נוסחת קרמר את המערכת הבאה:}$$

פתרון:

$$\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ x - y + 5z - w = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 - w - z \\ x - y = 5 + w - 5z \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 - w - z & -2 \\ 5 + w - 5z & -1 \end{vmatrix} = 3w + 11z + 9 \Rightarrow x = 3w + 11z + 9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 - w - z \\ 1 & 5 + w - 5z \end{vmatrix} = 4 + 2w - 4z \Rightarrow y = 4 + 2w - 4z$$