

פונקציות מרוכבות

תרגיל בית מס' 5

1. היעזרו במשפט קושי כדי לחשב את האינטגרלים הבאים :
א. $\int_C (e^{\cos(z)} + z^3) dz$ כאשר C הוא חצי המעגל עם מרכז בראשית וברדיוס 1 המחבר את הנקודות 1 ו-1- ומכוון נגד כיוון השעון.

ב. $\int_C \frac{1 + (-iz - 2)^9}{16 - (-iz - 2)^2} dz$ כאשר C הוא חצי המעגל עם מרכז בנקודה $2i$ וברדיוס 2 המחבר את הנקודות 0 ו- $4i$ ומכוון נגד כיוון השעון.

2. חשב את האינטגרל : $\int_C \frac{\sin \pi(z+1) + \cos \pi z}{(z-1)(z-2)} dz$, $C: |z|=4$.

3. יהי γ עקום סגור ותהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתוך ועל γ . אם הנקודה z_0 אינה נמצאת על γ , הוכיחו כי

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

4. חשב את האינטגרל : $\int_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz$

א. $C: |z+2-i|=3$

ב. $C: |z-i|=2$

ג. $C: |z+i|=1$

5. חשב את האינטגרל : $\int_C \frac{dz}{z^4 + 2iz^3}$

א. $C: |z|=3$

ב. $C: |z-2i|=1$

6. תהי $f(z)$ מוגדרת ע"י $f(z) = \oint_{|s|=3} \frac{3s^2 + 7s + 1}{z-s} ds$. מצא את $f'(1+i)$.

7. נסמן $M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|$. על ידי שימוש בנוסחת קושי, הראה כי עבור $n = 0, 1, 2, \dots$ מתקיים :

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n}$$