תרגיל 1 אינפי 1 למדמ"ח

אינפיניטסימלים / להגשה עד 21.11, 23.11 או 24.11 בהתאם לתרגול

שימו לב!! לכל הסטודנטים - נא להגיש את התרגיל למתרגל בתרגול! **אין הגשה בתאים!**

בכל התרגיל H,K אינסופיים חיוביים ו ϵ,δ אינפיניטסימלים חיוביים.

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\frac{1}{H}$ הוא אינפיניטסימל.

(ב) אם ϵ,δ הם אינפיניטסימלים אז $\epsilon\cdot\delta$ הוא אינפיניטסימל.

(ג) אם H אינסופי ו b סופי חיובי שאינו אינפיניטסימל הוכיחו כי Hb אינסופי חיובי.

(ד) אם a,b מספרים סופיים אז ab סופי.

(ה) $\frac{H}{K}$ יכול לצאת אינפיניטסימל, מספר סופי שאינו אינפיניטסימל או מספר אינסופי.

<u>פיתרון:</u>

(א) כיון ש- H חיובי, אז גם $\frac{1}{H}$ חיובי, ולכן צריך להראות שלכל $r>0$ ממשי מתקיים $\frac{1}{H}<r$.

אכן, יהי $r>0$ ממשי, מהגדרת H כאינסופי מתקיים $\frac{1}{r}<H$. נחלק את אי השיוויון ב- H ונכפיל ב- r (כיוון ששניהם חיוביים הסימן נשאר על צדו) ונקבל $\frac{1}{H}<r$. מש"ל.

(ב) יהי $r>0$ ממשי, צריך להוכיח ש- $\epsilon\cdot\delta<r$. שוב, כיון שכל המספרים כאן חיוביים הכפלה בהם לא משנה את צד אי השיוויון. מהגדרת ϵ,δ כאינפיניטסימליים חיוביים נובע $(*)$ $\epsilon<\sqrt{r},\delta<\sqrt{r}$. ולכן:

$$\epsilon\cdot\delta \overset{*}{<} \epsilon\cdot\sqrt{r} \overset{*}{<} \sqrt{r}\cdot\sqrt{r}=r$$

אי השיוויונים נובעים גם מכלל ההעברה, שכמו שבממשיים הכפלה של איבר במשהו קטנה מהכפלתו במשהו גדול יותר (כשהכל חיובי), כך גם בהיפר ממשיים.

(ג) H,b חיוביים, ולכן (מכלל ההעברה) מכפלתם חיובית. נראה שזה אינסופי: יהי $0<r\in\mathbb{R}$, צריך להראות ש- $r<Hb$. מהעובדה ש- b סופי שאיננו אינפיניטסימל נובע ש-$\frac{1}{b}$ סופי, ולכן $\frac{r}{b}$ סופי. ראינו בתרגול שמספר אינסופי גדול מכל מספר סופי (גם אם איננו ממשי), ולכן $H>\frac{r}{b}$ ולכן $Hb>r$.

(ד) טענת עזר: x סופי אמ"ם $|x|$ סופי. הוכחה: אם $|x|<r$ אזי נקבל $-r<x<r$. מאידך אם $a<x<b$ אז נסמן $c=max\{|a|,|b|\}$ ונקבל $|x|<c$.

כעת, a,b סופיים, ולכן גם $|a|,|b|$, ולכן קיימים x_1,x_2 כך ש־ $|a|<x_1,|b|<x_2$, ולכן $|ab|=|a|\cdot|b|<x_1x_2$ (כולם חיוביים ולכן הסימן נשמר), ולכן $|ab|$ סופי ולכן (לפי טענת העזר) גם ab סופי.

(ה) אינפיניטסימל: ניקח $K=H^2$. סופי שאינו אינפיניטסימל: ניקח $K=H$. אינסופי: ניקח $H=K^2$.

2. קבעו עבור כל אחד מהמספרים הבאים אם הוא:

- אינפיניטסימלי.
- אינסופי.
- סופי שאינו אינפיניטסימל.
- לא ניתן לקבוע.

הוכיחו קביעתכם. (במקרה שלא ניתן לקבוע הדגימו שיכולים לצאת מצבים שונים)

(א) $\sqrt{H+1}-\sqrt{H}$

(ב) $\dfrac{H+4+\epsilon}{H^2+2\epsilon}$

(ג) $\dfrac{\sqrt{4+\epsilon}-2}{\epsilon}$

(ד) $H\epsilon$

(ה) $H(\sqrt{3+\frac{1}{H}}-\sqrt{3})$

(ו) $\dfrac{\sqrt{H}}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H+2}}$

(ז) $\sqrt[3]{H}-\sqrt[3]{H+1}$ (רמז: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$)

(ח) $\dfrac{(3+\epsilon)(4+\delta)-12}{\epsilon\delta}$

(ט) $\dfrac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}$ (רמז: חלקו מונה ומכנה ב H והפרידו למקרים)

(י) $\dfrac{H+\sin H}{H-\cos H}$

פיתרון:

(א) מתקיים: $\sqrt{H+1}-\sqrt{H}=\frac{H+1-H}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}=\frac{1}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}$, המונה סופי שאיננו אינפיניטסימל והמכנה אינסופי, ולכן זה בסה"כ אינפינטסימל.

(ב) מתקיים: $\dfrac{H+4+\epsilon}{H^2+2\epsilon}=\frac{1+\frac{4}{H}+\frac{\epsilon}{H}}{H+\frac{2\epsilon}{H}}$, ראינו לעיל ש־ $\frac{1}{H}$ אינפיניטסימל, ולכן גם $\frac{4}{H}$. עוד ראינו ש $\frac{\epsilon}{H}$ אינפיניטסימל, ולכן נקבל מונה סופי שאיננו אינפיניטסימל ומכנה אינסופי, שזה כמו סופי כפול אינפיניטסימל ולכן אינפינטסימל.

(ג) מתקיים: $\frac{1}{\sqrt{4+\epsilon}+2}=\frac{\epsilon}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)}=\frac{4+\epsilon-4}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)}=\dfrac{\sqrt{4+\epsilon}-2}{\epsilon}$, המכנה סופי שאיננו אינפיניטסימל ולכן זה בסה"כ מספר סופי שאיננו אינפיניטסימל.

(ד) יכול לצאת כל אחת משלוש האפשרויות, הדוגמאות משאלה 1 סעיף (e) מתאימות עבור $\epsilon=\frac{1}{K}$, שראינו שהוא אינפיניטסימל.

(ה) מתקיים: $\frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{H}}+\sqrt{3}} = \frac{H(3+\frac{1}{H}-3)}{\sqrt{3+\frac{1}{H}}+\sqrt{3}} = H(\sqrt{3+\frac{1}{H}}-\sqrt{3})$, המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו סופי שאיננו אינפיניטסימל.

(ו) מתקיים: $= \frac{1}{\sqrt{\frac{H+1}{H}}+\sqrt{\frac{H+2}{H}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{H+1}+\sqrt{H+2}}{\sqrt{H}}} = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H+2}}$ $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+\sqrt{1+\frac{2}{H}}}$. המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו גם כזה.

(ז) נשתמש ברמז ע"י שנבחר $x=\sqrt[3]{H}, y=\sqrt[3]{H+1}$, ולכן נקבל: $\sqrt[3]{H}-\sqrt[3]{H+1} = \frac{H-(H+1)}{\sqrt[3]{H^2}+\sqrt[3]{H(H+1)}+\sqrt[3]{(H+1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{H^2}+\sqrt[3]{H(H+1)}+\sqrt[3]{(H+1)^2}}$, כאשר המכנה הוא אינסופי ולכן זהו מספר אינפיניטסימלי.

(ח) מתקיים: $1+\frac{4}{\delta}+\frac{3}{\epsilon} = \frac{12+3\delta+4\epsilon+\epsilon\delta-12}{\epsilon\delta} = \frac{(3+\epsilon)(4+\delta)-12}{\epsilon\delta}$. קיבלנו חיבור של שני מספריים אינסופיים חיוביים ו־1, ולכן זה בסה"כ מספר אינסופי.

(ט) מתקיים: $\frac{1+\frac{K}{H}}{\sqrt{1+(\frac{K}{H})^2}} = \frac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}$. נסמן $M=\frac{K}{H}$. ראינו ש־M יכול להיות כל אחת משלוש האפשרויות. אם הוא אינפיניטסימל או סופי שאיננו אינפיניטסימל אז נקבל מונה ומכנה סופיים שאינם אינפינטסימלים ולכן המספר סופי שאיננו אינפיניטסימל. אם M אינסופי אז נחלק מונה ומכנה ב־M לקבל $\frac{1+\frac{1}{M}}{\sqrt{1+(\frac{1}{M})^2}}$, וכיון ש־$\frac{1}{M}$ אינפיניטסימל אז המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר סופי שאיננו אינפיניטסימל.

(י) מתקיים: $\frac{1+\frac{\sin H}{H}}{1-\frac{\cos H}{H}} = \frac{H+\sin H}{H-\cos H}$. כיון שהפונקציות $\sin, \cos$ חסומות על הממשיים, הן חסומות גם על ההיפר ממשיים, ולכן סופיים. ולכן $\frac{\sin H}{H}, \frac{\cos H}{H}$ אינפיניטסימלים. ובסה"כ המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו כזה.

3. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$. עבור אילו ערכי a,b המספר

$$\frac{aH^2-2H+5}{bH^2+H-2}$$

הוא

(א) אינפיניטסימל.

(ב) אינסופי.

(ג) סופי אך לא אינפיניטסימל.

<u>**פיתרון:**</u>

נשים לב ש־ $\frac{a-\frac{2}{H}+\frac{5}{H^2}}{b+\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}} = \frac{aH^2-2H+5}{bH^2+H-2}$, כאשר $\frac{5}{H^2}-\frac{2}{H}$ וגם $\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}$ אינפיניטסימלים. לכן:

אם $a,b\neq 0$ נקבל מונה ומכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים, ולכן המספר גם כזה.

אם $a=0, b\neq 0$ נקבל מונה אינפיניטסימלי ומכנה סופי ולכן זהו מספר אינפיניטסימלי.

אם $a\neq 0, b=0$ נקבל מונה סופי ומכנה אינפיניטסימלי ולכן זהו מספר אינסופי.

אם $a=b=0$ נקבל: $\frac{-\frac{2}{H}+\frac{5}{H^2}}{\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}}=\frac{-2+\frac{5}{H}}{1-\frac{2}{H}}$ ולכן המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו כזה.

לסיכום: זהו מספר אינפיניטסימל כאשר $a=0, b\neq 0$, זהו מספר אינסופי כאשר $a\neq 0, b=0$ וזהו מספר סופי שאיננו אינפיניטסימלי כאשר $a=b=0 \vee a,b\neq 0$.

4. בכל אחד מהסעיפים הבאים סדרו את המספרים בסדר עולה, הוכיחו קביעותיכם.

(א) $$4+6\epsilon^2, \quad -\frac{1}{8\epsilon}, \quad 0, \quad 4+2\epsilon, \quad 7$$

(ב) $$7, \quad 0, \quad H^2-H, \quad \frac{1}{3H}, \quad \frac{1}{5H^2}, \quad H-H^2$$

<u>פיתרון:</u>

(א) $-\frac{1}{8\epsilon}<0<4+6\epsilon^2<4+2\epsilon<7$.

הסבר: $-\frac{1}{8\epsilon}$ הוא השלילי היחיד ולכן הכי קטן. שאר המספרים למעט 0 חיוביים ולכן הבא בתור הוא 0. כיון ש־ $6\epsilon^2, 2\epsilon$ הם אינפיניטסימלים ולכן שניהם קטנים מ־1 ולכן $4+6\epsilon^2, 4+2\epsilon<4+1=5<7$. נותר להראות ש־ $4+6\epsilon^2<4+2\epsilon$. ובכן: $\epsilon<\frac{1}{3}\Rightarrow 3\epsilon^2<\epsilon\Rightarrow 6\epsilon^2<2\epsilon\Rightarrow 4+6\epsilon^2<4+2\epsilon$ (המעבר הראשון נובע מהכפלה ב־ 3ϵ שזה מספר חיובי שלא משנה את הסימן. באותו אופן המעבר השני ע"י הכפלה ב־ 2.).

(ב) $H-H^2<0<\frac{1}{H^2}<\frac{1}{3H}<7<H^2-H$.

הסבר $H-H^2=H(1-H)$ ולכן זהו מכפלת אינסופיים אחד חיובי ואחד שלילי ולכן אינסופי שלילי.

$H^2-H=H(H-1)$ שזה מכפלת אינסופיים חיוביים ולכן אינסופי חיובי.

$\frac{1}{5H^2}, \frac{1}{3H}$ שניהם אינפיניטסימלים ולכן בין 0 ל־7. נראה ש־ $\frac{1}{5H^2}<\frac{1}{3H}$: H אינסופי חיובי ולכן $H>\frac{3}{5}$, כעת נקבל $3<5H$ ולכן $3H<5H^2$ (הכפלה ב־ H) ולכן נקבל $\frac{1}{3H}>\frac{1}{5H^2}$ (כמו בממשיים שבהופכיים הסימן מתהפך, אם $a<b$ בממשיים אז $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$, ומכלל המעבר זה גם בהיפר ממשיים.)

בהצלחה!